FİZİKTE MATEMATİK YÖNTEMLER

FONKSİYONLAR

" Eğer x kümesindeki her bir x elemanına y'de tam olarak bir tek y elemanı karşılık geliyorsa, bu ilişkilendirmeye x kümesinden y kümesine bir fonksiyon denir. f:x→y, x kümesine f'nin tanım kümesi, x'e karşılık gelen y kümesine de değer kümesi denir." Örnek: $f(x)=y=3x^2+2x-1$, burada y bağımlı x ise bağımsız değişkendir.

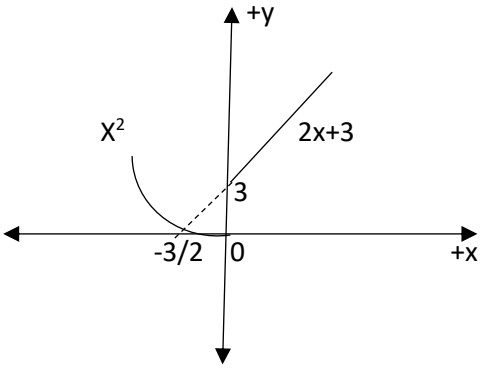
Örnek: $f(x)=(x^2-x-6)^{1/2}$ ve $g(x)=2x/(x^2-3x-4)$ fonksiyonların tanım ve değer kümelerini bulun.

Çözüm: $x^2-x-6\geq 0 \rightarrow (x-3)(x+2)\geq 0 \rightarrow x\geq 3$ ve $x\geq -2 \rightarrow$ TK : $(-\infty, -2]$ ve $[3, +\infty)$, GK:$[0, +\infty)$

$(x^2-3x-4)\neq 0 \rightarrow (x-4)(x+1)\neq 0 \rightarrow x\neq 4$ ve $x\neq -1 \rightarrow$ TK: R-{-1,-4}, GK:R

Örnek: f(x)={ x<0 için x^2, x≥0 için (2x+3). Fonksiyonunun grafiğini çizin ve k=[f(-2)+f(0)]/[4f(3)] ise k'yı bulun.

Çözüm:



$k=[(-2)^2+(3)]/[4.(9)]=7/36$

Örnek: $f(x)=[\log_2(x-3)+(x^2+5x+6)]/[1-\sin x]$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

Örnek: f(x)=I3x+4I/(Ix+2I-5) fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

Örnek: f(x)=[x] tam değer fonksiyonunun [-2, 2] aralığında grafiğini çiziniz.

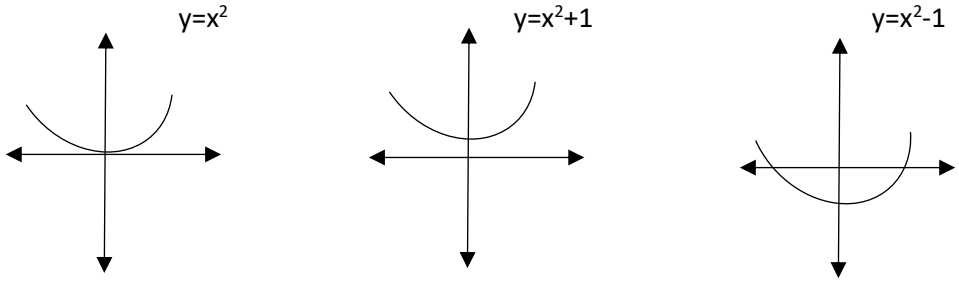
Çözüm:

Bileşke fonksiyonlar: → Aritmetik Birleşimler

"f ve g iki fonksiyon ise bunların dört işlemi şöyle tanımlanır: 1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, 2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, 3) $(f.g)(x)=f(x).g(x)$, 4)$(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ burada $g(x)\neq 0$. "

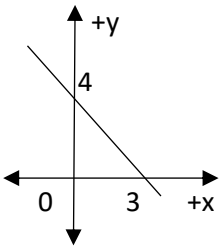
Fonksiyonların bileşimi → f ve g iki fonksiyon; $(fog)(x)=f(g(x))$ ve $(gof)(x)=g(f(x))$.

"Fonksiyonun grafiğinin şeklini değil sadece yerini değiştiren dönüşüme katı dönüşüm denir."



Doğru denklemi: $y-y_1=m(x-x_1)$ veya $(x/a)+(y/b)=1$, burada a x eksenini, b ise y eksenini kestiği noktadır.

Örnek: Şekildeki doğrunun denklemini bulunuz.



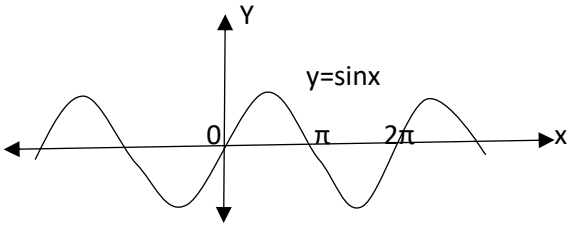
Çözüm: $y=(-4/3)x+4$

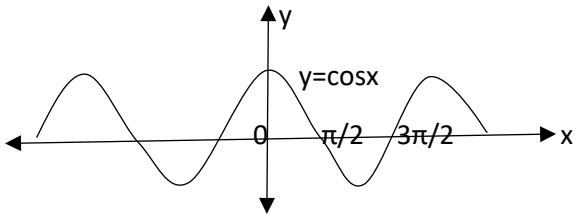
Rasyonel fonksiyonlar: $f(x)=p(x)/q(x)$

Der[p(x)]>der[q(x)] ise bölüm r(x) eğik asimtot dur. Der[p(x)]=der[q(x)] ise bölüm $\lim_{x\to\infty} f(x)$ yatay asimtot dur. $q(x)=0$ yapan x değerleri düşey asimtot dur.

Örnek: a) $y=(x^2-5x+6)/(x-4)$ asimtotlarını bulun ve grafiğini çizin. b) $y=(3x^2+2x-2)/(x^2+3x+2)$ asimtotlarını bulun ve grafiğini çizin.

Transdant fonksiyonlar: Bunlar $y=x^n$ olarak (n irrasyonel) da ifade edilen fonksiyonlardır. Trigonometrik ve e^{ax} tipindeki fonksiyonlar buna örnektir.





"Trigonometrik fonksiyonlar periyodik fonksiyonlardır. Y=sinx tek, y=cosx çift fonksiyondur." Trigonometrik fonksiyonlar için; $\sin x=\sin(x+2\pi)$, $\cos x=\cos(x+2\pi)$ buradaki 2π periyottur. $\tan x=\tan(x+\pi)$, $\cot x=\cot(x+\pi)$ burada π periyottur. $Y=D+A\sin(Bx+C)$ tipindeki fonksiyonlarda grafik çizerken; D düşey kaydırma, B periyodu değiştirerek yatay esnetme, C ise yatay öteleme özellikleri kullanılabilir.

Örnek: $y=3+2\sin(x+\pi/2)$ fonksiyonunun $[-2\pi, +2\pi]$ aralığında grafiğini çiziniz.

Ters fonksiyon: "$f:A \rightarrow B$ birebir ve örten $f^{-1}:B \rightarrow A$ tanımlı fonksiyon ters fonksiyondur.

Örnek: $f(x)=5x+2$ ise $f^{-1}(x)$ nedir? Çözüm: $y=5x+2 \rightarrow x=(y-2)/5 \rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)/5$.

Örnek: $f(x)=(3x+4)/(2x-5)$ ise $f^{-1}(x)$ nedir? Çözüm: +3 ile -5 yer ve işaret değiştirir; $f^{-1}(x)=(5x+4)/(2x-3)$.

Birim fonksiyon: "$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=I$, buradaki I birim fonksiyondur."

Örnek: $f(x)=2x-1$ in birim fonksiyonu nedir? Çözüm: $f^{-1}(x)=(x+1)/2 \rightarrow f(f^{-1}(x))=2[(x+1)/2]-1=x$ dir.

İşaret fonksiyonu (Sgn): $\mathrm{Sgn}f(x)=\{f(x)<0$ ise -1, $f(x)=0$ ise 0, $f(x)>0$ ise $1\}$.

Ters trigonometrik fonksiyonlar: $y=\sin^{-1}x=\arcsin x$ burada $-1 \leq x \leq +1$, $x=\sin y \rightarrow -\pi/2 \leq y \leq +\pi/2$.

Örnek: $y=\sin^{-1}(1/2) \rightarrow ½=\sin y \rightarrow y=\pi/6$.

Alıştırmalar:

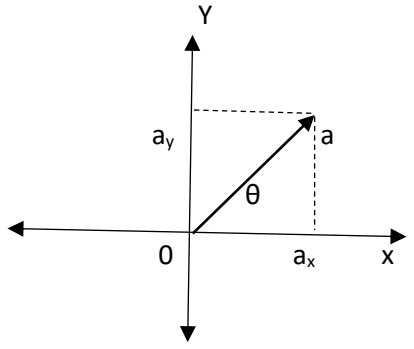
1) $y=\tan[\sin^{-1}(3/4)]$ kaçtır?

2) $y=\arccos x$ in grafiğini çiziniz.

3) $f(x)=3+(2x-1)^{1/2} \rightarrow f^{-1}(x)$ 'i bularak grafiğini çiziniz.

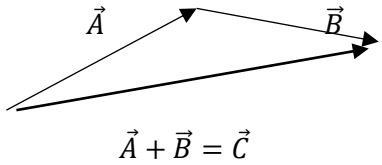
VEKTÖRLER

"**Vektör**: yönü, belirli büyüklüğü ve doğrultusu olan niceliktir".

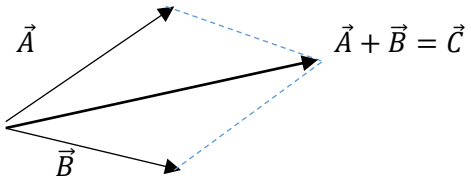


Burada a_x=acosθ ve a_y=asinθ dır. $\vec{a} = \overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$ =(a_x, a_y) , a vektörünün iki boyutta (x-y düzleminde) gösterimidir.

Vektörlerin toplanması: " Vektörler uc uca eklenerek, iki vektörün başlangıç noktaları bir araya getirildikten sonra paralel kenar kuralı kullanılarak, vektörler koordinat sistemine yerleştirilip bileşenlerine ayrılarak toplama işlemi yapılabilir (bileşke vektör bulunabilir)".



Uc uca ekleme



paralelkenar

Paralelkenarda A ve B vektörleri arasındaki açı θ ise C vektörünün büyüklüğü $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$ dır.

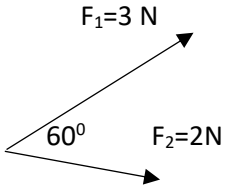
Örnek: $\vec{a} = (2,3)$, $\vec{b} = (-1,4)$ ise $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ve $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$ yi bulunuz.

Çözüm: c=(2,3)+(-1,4)=(1,7) → $|\vec{c}| = 5\sqrt{2}$, d=2(2,3)-(-1,4)=(5,2) → $|\vec{d}| = \sqrt{29}$

Örnek: a=(2,3,0), b=(0,1,4) için a+b yi bulunuz.

Çözüm: a+b=(2,3,0)+(0,1,4)=(2,4,4) →Ia+bI=6

Örnek:



şekildeki vektörlerin bileşkesini bulunuz.

Çözüm: $R^2=2^2+3^2+2.2.3.(1/2)=19 \rightarrow R = \sqrt{19}$ N

Vektörlerin çarpılması:

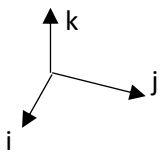
1)Skaler çarpım (Nokta çarpımı): $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta$, burada θ vektörler arasındaki açıdır. $\vec{a}.\vec{b} = (a_x, a_y).(b_x, b_y) = (a_x b_x + a_y b_y)$. İki vektör dik ise skaler çarpım sıfırdır.

Örnek: a=(4,2,-1), b=(-2,3,0) → a.b=?

Çözüm: a.b=(4,2,-1).(-2,3,0)=(-8+6+0)=-2

2)Vektörel çarpım (kros çarpım): $\vec{a} \times \vec{b} = (a_x, a_y, a_z).(b_x, b_y, b_z) = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$

veya $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.sin\theta.\hat{n}$ burada n, a ve b'nin bulunduğu düzleme dik birim vektördür.

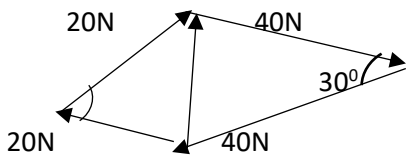


ixj=k, jxk=i, kxi=j, jxi=-k, ixk=-J, kxj=-i (saat yönü -, tersi +)

Alıştırmalar:

1)Bir noktaya F_1=(4,3, -1)N, F_2(6,-2,3)N ve F_3 kuvveti aynı anda etki edince nokta hareketsiz kalmaktadır. Buna göre F_3 kuvvetinin büyüklüğü kaç N dur?

2)



Şekildeki vektörler aynı düzlemdedir. Bileşke vektör kaç N dur?

3) a=(4,2k,-1), b=(k^2, 3,2) vektörleri birbirine dik ise k nedir?

4) a=(2,-1,3), b=(0,2,-4), c=(1,-3,0) şekildeki vektörler için $\frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{c}-\vec{b}|}$ =?, a ile b arasındaki açı nedir?

5) Örnek: a=(1,2,3), b=(4,0,-1) → $\vec{a} \times \vec{b}$ nedir?

LİMİT

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ yani x, a'ya yaklaşırken f(x) in iki taraflı limiti var ve L 'dir.

Parçalı fonksiyonun limitinde;

Örnek: f(x)=$\begin{cases} x^2 & x < 3 \\ -2x+15 & x > 3 \end{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to 3^-} x^2 = 9$ ve $\lim\limits_{x\to 3^+} (-2x+15) = 9 \rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 9$.

Örnek: $f(x) = \frac{|x|}{x} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

Çözüm: $\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \to \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

Limit kuralları:

1) $\lim_{x\to a} b = b$, 2) $\lim_{x\to a} b\, f(x) = b.\lim_{x\to a} f(x)$, 3) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$,
4) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$, 5) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, 6) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$, 7) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, 8) f, (a,b) açık aralığında her noktada sürekli ise $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ ve $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ [a,b] kapalı aralığı üzerinde süreklidir. 9) $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(L)$.

"**Ara değer teoremi:** f, [a,b] aralığında f(a)≠f(b) olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ve N, f(a) ile f(b) arasında herhangi bir sayı ise, bu durumda f(c)=N olacak şekilde a ve b aralığında en az bir c sayısı vardır."

"**Sıkıştırma teoremi:** Bir a noktasını içeren bir açık aralıktaki her x için g(x)≤f(x)≤h(x) olacak şekilde, f, g, h fonksiyonları verilsin. Eğer $\lim_{x\to a} g(x) = L$ ve $\lim_{x\to a} h(x) = L$ ise, bu durumda $\lim_{x\to a} f(x) = L$ olur."

Örnek: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = ?$

Çözüm:

"**Limitte belirsizlikler**: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, ∞-∞, 0.∞, 0^0, ∞^0 ve 1^∞ ".

Örnek: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+4x+3}{3x^2+2x-1} \to \lim_{x\to\infty} \frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(5+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(3+2/x-1/x^2)} = \frac{5}{3}$

Alıştırmalar:

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5}{3x^2+2x-3}$ limitini hesaplayınız.

2) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{4x^2-1}{3x^2+2x+1}}$ limitini hesaplayınız.

3) $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4+2x^2+1}\right)$ limitini hesaplayınız.

4) $\lim_{x\to 5} \frac{25-x^2}{5-x}$ limitini hesaplayınız.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{3x-1}-\frac{5x^2+4}{x^2-1}\right)$ limitini hesaplayınız.

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{4x^2+5}}\right)$ limitini hesaplayınız.

8) $\lim\limits_{x\to\infty} ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ limitini hesaplayınız.

9) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$ limitini hesaplayınız.

10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3sin2x}{4x}$ limitini hesaplayınız.

11) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2x+1}{sinx}-\frac{3}{4x}\right)$ limitini hesaplayınız.

12) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1/lnx}$ limitini hesaplayınız.

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$ limitini hesaplayınız.

14) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{sin3x.cos2x}$ limitini hesaplayınız.

15) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\ln(sinx)}{(2x-\pi)^2}$ limitini hesaplayınız.

16) $\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$ limitini hesaplayınız.

17) Atmosferde kendini uçaktan serbest bırakan bir paraşütlüye; G=640 N ağırlık ve F_d=10.v^2 N'luk hıza bağlı bir direnç kuvveti etki ediyor. Bu paraşütlünün yere iniş hızı (limit hızı) kaç m/s olur?

TÜREV

" y=f(x) fonksiyonunun x noktasındaki türevi, $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ şeklindedir. f'(x)=df(x)/dx şeklinde de gösterilir."

Örnek: f(x)=y=x^2-3 → y'=dy/dx=$\lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^2-3]-[x^2-3]}{h}$ →$\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=2x$

Türevin Kuralları:

1)y=A.x^n → y'=A.n.x^{n-1} , y=B=sabit →y'=0

2)y=A.u^n → y'=A.n.u^{n-1}.u' , burada u'=du/dx dir.

3)f(x)=g(x).h(x) → f'(x)=g'(x).h(x)+g(x).h'(x)

4)$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\to f'(x)=\frac{g'(x).h(x)-g(x).h\prime(x)}{[h(x)]^2}$

5)I.türev y'=f'(x)=df(x)/dx, II.türev y''=f''(x)=d^2f(x)/dx^2, n.türev $y^{(n)}$=d^ny/dx^n . Fizikte zamana göre türevler; $\dot{y}(t)=\frac{dy(t)}{dt}$, $\ddot{y}(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ … şeklinde gösterilir.

Trigonometrik ve üstel fonksiyonların türevleri:

1)y=sinx → y'=cosx, y=A.sinu → y'=A.sinu.u'

2) y=cosx → y'=-sinx

3) y=tanx → y'=1+$\tan^2$x=$\sec^2$x

4)y=cotx → y'=-(1+$\cot^2$x)=-$\csc^2$x

5)y=arcsinx → $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6)y=arccosx → $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

7)y=arctanu → $y'=\frac{u\prime}{1+u^2}$, y=arccotu → $y'=\frac{-u\prime}{1+u^2}$

8) y=arcsecu → $y'=\frac{u\prime}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

9)y=e^u → y'=e^u.u'

10) y=a^u → y'=a^u.lna.u'

11) y=lnu → y'=u'/u

12) y=sinhx → y'=coshx , y=coshx → y'=sinhx

13) y=tanhu → y'=$\sec^2$hu.u', y=cothu → y'=-$\csc^2$hu.u'

14)y=arcsinhu → $y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$, y=arccoshu → $y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$

15) y=arctanhu → $y' = \frac{u'}{1-u^2}$ burada |u|<1 , y=arccothu → $y' = \frac{u'}{1-u^2}$ burada |u|>1.

16)Ters fonksiyonun türevi; $(f^{-1}(x))' = 1/f'(f^{-1}(x))$. (Burada önce y yerine x yazılıp dx/dy bulunur, sonra bu ifade ters çevrilerek dy/dx bulunur).

Kapalı fonksiyonların türevi:

" df(x,y)/dx → Burada x ve y nin ikiside değişken ve y, x'e bağlı olduğundan türevinin alındığı yerlere y'=dy/dx çarpanı getirilir".

Örnek: $f(x,y)=4xy^2-3y+2x^2+5yx^2-1$ ise df(x,y)/dx türevini alınız.

Çözüm: $4y^2+4x.2yy'-3y'+4x+5y'x^2+5y.2x=0 \rightarrow y' = \frac{-4y^2-10xy-4x}{8xy-3+5x^2}$. Bu türev $f'=-f_x/f_y$ kuralıyla da alınabilir.

Zincir kuralı:

Y=f(x) ve x=g(t) → $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$

Örnek: $y=x^2+3x+4$ ve $x=4t^3+5$ ise dy/dt nedir?

Çözüm: dy/dx=2x+3, $dx/dt=12t^2$ → $dy/dt=(2x+3)(12t^2)=(8t^3+13)(12t^2)=96t^5+156t^2$.

Alıştırmalar:

1)$y=4x^2+2x-5$ ise y'=?

2)$y=3x+4(2x-5)^3$ → y'=?

3)$y=(2x^3+3)(x^2+4)$ → y'=?

4)$y=(ax^2+bx+c)^n$ → y'=?

5)$y=x^m$ (m>0) → $y^{(n)}$=?

6)$y = \frac{3x+1}{5x-2} \rightarrow y' = ?$

7) $y = \frac{(x-1)^2}{(3x+2)^3} \rightarrow y' = ?$

8) $y = \sqrt{5x^2 - 4} \rightarrow y'(1) = ?$

9) y=sin($2x^3$+3x-1) → y'=?

10) y=$\sin^2$x → y'(π/6)=?

11) y=x^2.cos3x → y'=?

12)y=tan2x+(1/sinx) → y'=?

13)y=sinx.$\sin^{-1}$x → y'=?

14)$y = e^{5x^2+2x+1} \rightarrow y' = ?$

15)y=3^{2x+5} → y'(0)=?

16)y=ln(x^2-4) → y''=?

17)y=ln(sinx/x)→ y'(π/2)=?

18)$y = \tan^{-1}(x^2 + 2) - \sqrt{1 - sin3x} + \frac{lnx}{x^2+1} - (x^3 - 2)^4 \rightarrow y' = ?$

Türevin uygulamaları:

1)Doğrusal hareket:

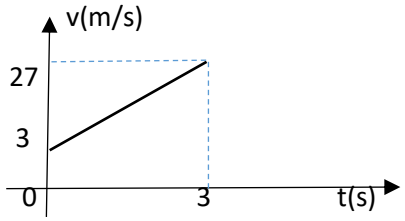
Doğrusal harekette hız fonksiyonu $v(t) = \frac{d}{dt}s(t)$, ivme fonksiyonu $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$ şeklindedir.

Örnek: Doğrusal bir yolda hareket eden bir cismin yaptığı yer değiştirme zamana bağlı olarak x(t)=$4t^2$+3t-2 (metre) şeklindedir.

a)Cismin t=3.saniyedeki hızını ve ivmesini bulunuz. b)Hız-zaman grafiğini çiziniz.

Çözüm: a) $v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 8t + 3 \rightarrow$ v(3)=27 m/s . $a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = 8 \rightarrow$ a(3)=8 m/s^2

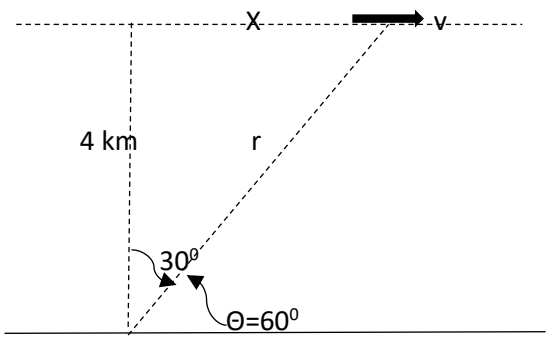
b)



2)Bağlantılı oranlar:

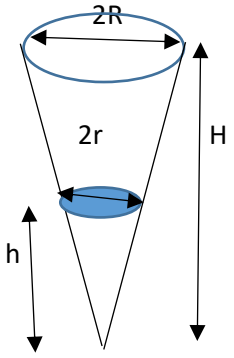
Örnek: 4 km yükseklikteki bir uçak yerdeki bir gözlem radarının üzerinden direkt olarak geçmektedir. Yükselme açısı 60^0 olduğunda bu açının dakikada 30^0 lik hızla azaldığı gözlenmektedir. Buna göre uçağın geçiş hızı kaç km/dk dır?

Çözüm:



X=r.cosθ $\rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}cos\theta - rsin\theta\frac{d\theta}{dt}$, h=rsinθ $\rightarrow \frac{dr}{dt} = -r\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{d\theta}{dt}$, $v(t) = \left(\frac{-r.cos^2\theta}{\sin\theta} - r.\sin\theta\right)\frac{d\theta}{dt}$. Şeklin geometrisinden $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$, bu durumda hız $v(t) = \frac{-r}{sin\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{-x}{sin\theta.cos\theta}\frac{d\theta}{dt} \rightarrow v(t)_{60} = \frac{\frac{-4}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}}\frac{\pi}{6} = -\frac{8\pi}{9}$ km/dk olur.

Örnek:



Şekildeki koni tankın tabanında birim zamanda α hacminde su sızmaktadır. Tank başlangıçta tamamen doludur. Su yüksekliği h olduğunda: a)Suyun seviyesinin değişim oranı nedir? b)Su yüzeyinin yarıçapının değişim oranı nedir?

Çözüm: Şekildeki durumda $V = \frac{1}{3}\pi(R^2H - r^2h)$, şeklin geometrisinden r/R=h/H dır. a) $V = \frac{1}{3}\pi R^2\left(H - \frac{h^3}{H^2}\right) \rightarrow$ $\frac{dV}{dt} = 0 - \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{H^2}3h^2\frac{dh}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{\alpha.H^2}{\pi R^2h^2}$

b)Burada r zamana göre değişmektedir (h=rH/R alınır) . Yine dV/dt=0 dan dr/dt bulunur.

3)Fonksiyonların ekstremumları (Maksimum ve minimumları):

a)Mutlak ekstremumlar: f'nin tanım kümesindeki her x için f(x)≤f(a) ise, f(a) sayısına f'nin mutlak maksimumu denir. f(x)≥f(a) ise f(a) sayısına f'nin mutlak minimumu denir.

Örnek: $f(x)=3x^2-4x+5$ ekstremum noktalarını bulun.

Çözüm: $df(x)/dx=6x-4=0 \rightarrow x=2/3 \rightarrow f(2/3)=3.(2/3)^2-4.(2/3)+5=11/3$ de mutlak minimumdur.

b)Yerel esktremumlar: a'yı içeren bir açık aralıktaki her x için f(x)≤f(a) ise f(a) sayısı f'nin mir yerel maksimumudur; f(x)≥f(a) ise yerel minimumudur. Uç noktalardaki ekstemumlar hariç her mutlak ekstemumlar aynı zamanda bir yerel ekstremumdur. f'(x)=0 yapan x sayılarına da kritik sayılar denir ve yerel ekstemumlar kritik noktalarda ortaya çıkar.

Örnek: $f(x)=x^2/(x-2)$ nin kritik sayılarını bulun.

Çözüm: $f'(x)=[2x(x-1)-x^2]/(x-2)=0 \rightarrow x^2-4x=0 \rightarrow x=0$ ve $x=4$

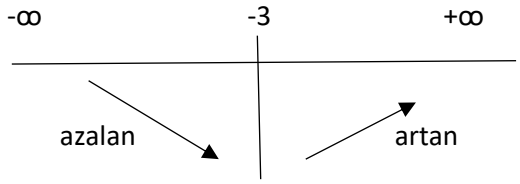
4)Ortalama değer teoremi: Rolle teoremi: f, [a,b] aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevi alınabilir bir fonksiyon olsun. Eğer f(a)=f(b) ise bu durumda (a,b) aralığında f'(c)=0 olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.

Türev için ortalama değer teoremi: (a,b) aralığında f'(c)=[f(b)-f(a)]/(b-a) olacak şekilde bir c sayısı vardır.

5)Artan/azalan fonksiyonlarda türev testi:

Örnek: $f(x)=x^2+6x-1$ fonksiyonunun artan/azalan aralıklarını belirleyiniz.

Çözüm: $f'(x)=2x+6 \rightarrow 2x+6<0 \rightarrow x\leq-3$ ve $2x+6>0 \rightarrow x>-3$



6)Lopital kuralı:

0/0 ve ∞/∞ belirsizliklerinin limitlerinde belirsizlik bitinceye kadar pay ve paydanı türevi alınır; $\lim_{x\to0}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}=c$.

Örnek: $\lim_{x\to0}\frac{x-sinx}{x^3}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x\to0}\frac{x-sinx}{x^3}=\frac{0}{0}\rightarrow\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{3x^2}=\frac{0}{0}\rightarrow\lim_{x\to0}\frac{sinx}{6x}=\frac{0}{0}\rightarrow\lim_{x\to0}\frac{cosx}{6}=\frac{1}{6}$

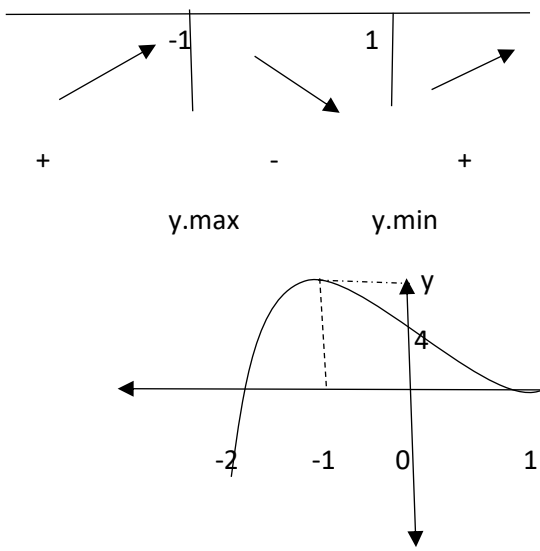
Örnek: $\lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2cosx}{\pi-3x}$ limitini hesaplayınız.

7)Grafik çiziminde birinci türev:

Bir f fonksiyonu, f'/x) in işaret değiştirdiği bir a kritik noktasında <u>yerel ekstremuma</u> sahiptir.

Örnek: $f(x)=x^3-3x+2$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bularak grafiğini çiziniz.

Çözüm: $f'(x)=3x^2-3=0 \rightarrow x=1$ ve $x=-1$; $f(1)=0$ ve $f(-1)=4$

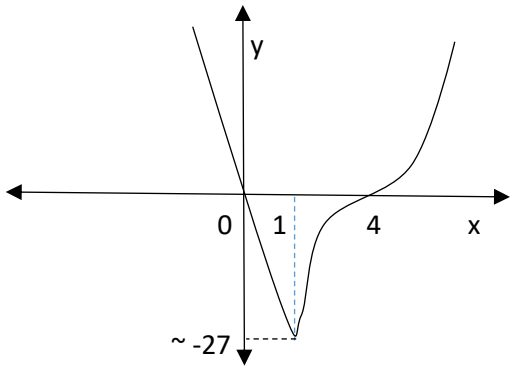


8)Grafik çiziminde ikinci türev:

Eğer (c, f(c)) noktası f fonksiyonunun grafiği için bir büküm noktası ise bu durumda ya $f''(c)=0$ ya da $f''(c)$ yoktur. $F''(c)>0$ ise f(c) bir yerel minimumdur. $F''(c)<0$ ise f(c) bir yerel maksimumdur. $F''(c)=0$ ise f(c) nin ektremum olup olmadığı söylenemez ve bu durumda birinci türev testi yapılır.

Örnek: $f(x)=x(x-4)^3$ fonksiyonunu bükey aralıklarını bularak grafiğini çiziniz.

Çözüm: $f(x)=0$ için $x=0$ ve $x=4$ dür. $F'(x)=(x-4)^3+3x((x-4)^2=0 \rightarrow x=1$ ve $x=4$ dür. $F''(x)=2(x-4)(4x-4)+(x-4)^2 4=0 \rightarrow x=4$ ve $x\neq R$.



Alıştırmalar:

1) $f(x)=x^3-6x^2+2$ nin [-3,2] aralığında mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

2) $f(x)=\sin x-(1/2)\cos 2x$ 'in $[0,2\pi]$ aralığında mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

3) f(x)=-x^2+3x-2 fonksiyonunun yerel maksimumunu yada minimumunu bulunuz.

4) f(x)=x^3-24.lnIxI fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bularak grafiğini çiziniz.

5)Bir doğru boyunca hareket eden bir cismin konum fonksiyonu zamana bağlı olarak x(t)=t^2+5t+3 şeklindedir. Bu cismin hız ve ivme fonksiyonlarını bulunuz.

6) Sürtünmesiz ortamda bir cisim düşey olarak yukarıya doğru v_0 ilk hızıyla atılıyor. Yerçekimi ivmesi her yerde sabit ve g olduğuna göre cismin çıkabileceği maksimum yükseklik verilenler türünden nedir? Cismin havada kalma süresi nedir?

İNTEGRAL

BELİRSİZ İNTEGRAL:

Her x ϵ I için F'(x)=f(x) ise F fonksiyonuna, f fonksiyonunun I aralığındaki <u>ters türevi</u> denir. Ters türevler bir sabit kadar farklıdır. $\int f(x)dx = F(x) + c$ şeklinde integral olarak gösterilir (Bu sembol Leibniz tarafından tanımlanmıştır).

Bazı belirsiz integraller:

1) $\int a.dx = ax + c$ (a sabit), **2)** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (n≠-1), **3)** $\int \frac{1}{x} dx = lnx + c$, **4)** $\int sinx.dx = -cosx + c$, **5)** $\int cosx.dx = sinx + c$, **6)** $\int sec^2x.dx = tanx + c$, **7)** $\int csc^2x.dx = -cotx + c$, **8)** $\int secx.tanx.dx = secx + c$, **9)** $\int cscx.cotx.dx = -cscx + c$, **10)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{dx} = \sin^{-1} x + c$, **11)** $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$, **12)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$, **13)** $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$, **14)** $\int e^x dx = e^x + c$, **15)** $\int \cosh x.dx = \sinh x + c$, **16)** $\int \sinh x.dx = \cosh x + c$

Örnek: $\int \left(2 + x^3 - sinx + \frac{4}{x} + \frac{3}{1+x^2} - \sec^2 x + 2e^x\right) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $2x + \frac{x^4}{4} + cosx + 4.lnx + 3\tan^{-1} x - tanx + 2e^x + c$

İntegral içindeki ifadeyi uygun hale getirme kuralları:

1)Değişken değiştirme:

Örnek: $\int (3x+1)^4 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: 3x+1=u → 3.dx=du ; $\int \frac{1}{3} u^4 du = \frac{1}{3}\frac{u^5}{5} + c = \frac{1}{15}(3x+1)^5 + c$

Örnek: $\int sin3x.dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: 3x=u → 3x.dx=du ; $\frac{1}{3}\int sinu.du = -\frac{1}{3}cosu + c = -\frac{1}{3}cos3x + c$

Örnek: $\int \sin^4 x\,.cosx.dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: sinx=u → -cosx.dx=du ; $-\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} + c = -\frac{1}{5}\sin^5 x + c$

Örnek: $\int e^{3x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: 3x=u → 3dx=du → dx=du/3 ; $\frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

Örnek: $\int \frac{dx}{e^{2x}+1}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Pay ve payda e^{-2x} ile çarpılırsa; $\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx$ olur. e^{-2x}=u →1+ e^{-2x}dx=-du/2 ; $-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}lnu + c = \frac{-1}{2}ln|1+e^{-2x}| + c$

Örnek: $\int \frac{3x.dx}{x^2+1}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: x^2+1=u → 2x.dx=du →x.dx=du/2; $\frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}lnu + c = \frac{3}{2}ln|x^2+1| + c$

Örnek: $\int \frac{e^{2/x}}{3x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: 2/x=u →(-2/x^2)dx=du → dx/x^2=-du/2 ; $\frac{-1}{6}\int e^u du = -\frac{1}{6}e^u + c = -\frac{1}{6}e^{\frac{2}{x}} + c$

Örnek: $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Karekök içi 3 parantezine alınır; $\sqrt{3}\sqrt{1-(\frac{2x}{\sqrt{3}})^2}$, sonra $\frac{2x}{\sqrt{3}} = u \to dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$; $\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + c$

2)Rasyonel kesirlere ayırma:

$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ 'de f(x) ve g(x) polinom fonksiyonlar; a)f(x)≥g(x) ise bölme işlemi yapılır, b)f(x)<g(x) ise g(x) çarpanlarına, sonra da rasyonel kesirlerine ayrılır.

Örnek: $\int \frac{2x^2+1}{x-3} dx \to \int \left(2x+6+\frac{19}{x-3}\right) dx = \int (2x+6)dx + \int \frac{19}{x-3} dx = x^2 + 6x + 19\ln|x-3| + c$

Örnek: $\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)} dx \to \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{2x-1}{x^2(x-1)} \to Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 = 2x-1$ → x=0 için B=1, x=1 için C=1, x=-1 için A=-1 olur. $\int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -lnx - \frac{1}{x} + ln|x-1| + c$

Örnek: $\int \frac{x+1}{(x^2+4)(x-1)} dx \to \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-1} = \frac{x+1}{(x^2+4)(x-1)}$ → (A+C)x^2+(B-A)x+(4C-B)=x+1 → A=-2/5, B=3/5, C=2/5 olur.

$$\int \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)x+\left(\frac{3}{5}\right)}{x^2+4} dx + \int \frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{x-1} dx = -\frac{1}{5}\left[\int \frac{-2x}{x^2+4} dx + 3\int \frac{dx}{x^2+4}\right] + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x-1} \to \frac{-1}{5}\left[-\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + \frac{2}{5}ln|x-1| + c$$

Özel trigonometrik integraller:

1)$\int tanx.dx = -ln|cosx| + c$, 2) $\int cotx.dx = ln|sinx| + c$, 3)$\int secx.dx = ln|secx + tanx| + c$

4) $\int cscx.dx = ln|cscx - cotx| + c$

Bazı cebirsel integraller:

1)$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$, 2) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$, 3) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$,

4) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$, 5) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + c$, 6) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$,

7) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c$

Not: Bu türden integraller alınırken <u>trigonometrik dönüşümler</u> yapılır/yapılabilir.

Örnek: $\int \frac{dx}{1-x^2} \to x = sin\theta \to dx = cos\theta.d\theta \to \int \frac{cos\theta.d\theta}{1-\sin^2\theta} = \int \frac{d\theta}{cos\theta} = \int sec\theta.d\theta = ln|sec\theta + tan\theta| + c \to ln\left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right| + c$

Köklü integral formülleri:

1)$\int u^n\sqrt{a+bu}.du \to a + bu = t$ dönüşümü yapılır. 2)$\int \sqrt{u^2 \mp a^2}\, du = \frac{u\sqrt{u^2\mp a^2}}{2} \mp \frac{a^2}{2} ln\left|u + \sqrt{u^2 \mp a^2}\right| + c$ veya trigonometrik dönüşüm yapılır. 3)$\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 + a^2} - aln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + c$, 4))$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + c$, 5))$\int \frac{\sqrt{u^2\mp a^2}}{u^2} du = -\left(\frac{\sqrt{u^2\mp a^2}}{u}\right) + ln\left|u + \sqrt{u^2 \mp a^2}\right| + c$, 6)$\int \sqrt{a^2 - u^2}du = \frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{a^2\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)}{2} + c$, 7)$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + c$, 8)$\int \sqrt{2au - u^2}\ du = \int \sqrt{a^2 - (u-a)^2}\, du \to u - a = t$ dönüşümü yapılır.

Örnek: $\int \sqrt{x^2 + 4}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: I.Yol: $\int \sqrt{x^2 + 4}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 2^2} + \frac{2^2}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 + 2^2}\right| + c$

II.Yol: x=2sinhθ → dx=2coshθ→ $\int 4cosh^2\theta.d\theta = 4\int \frac{1+cosh2\theta}{2} d\theta = 2\theta + sinh2\theta + c$

3)Kısmi integrasyon:

Çarpımların integrali; $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \to \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx \to \int \frac{df}{fx} g.dx + \int \frac{dg}{dx} f.dx \to \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$; $\int u.dv = u.v - \int v.du$.

"Genelde İntegral içindeki fonksiyonlar farklı türden fonksiyonlar ise kısmi integrasyon kullanılır. <u>Polinom x trigonometrik, polinom x logaritmik veya üstel, üstel x trigonometrik</u>."

Örnek: $\int lnx.dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: lnx=u → du=(1/x)dx, dx=dv → v=x ; $\int lnx.dx = x.lnx - \int x\frac{1}{x}dx = xlnx - x + c$

Örnek: $\int x.sin2x.dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: x=u → du=dx, sin2x.dx=dv → v=-(1/2)cos2x ; $= x\left(-\frac{1}{2}cos2x\right) + \frac{1}{2}\int cos2x\, dx \to \frac{-x}{2}cos2x + \frac{1}{4}sin2x + c$

Örnek: $\int xe^x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: x=u → du=dx, e^xdx=dv → v=e^x ; $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - x + c$

Örnek: $\int e^{2x}cos3x.dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: e^{2x}=u → du=2e^{2x}dx, cos3x.dx=dv → v=(1/3)sin3x ; $\frac{1}{3}e^{2x}sin3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}sin3x.dx$ → 2.terim için tekrar kısmi integral alınırsa (A); e^{2x}=u → du=2e^{2x}dx, sin3x.dx=dv → v=(-1/3)cos3x ; $A = -\frac{1}{3}e^{2x}cos3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}cos3x.dx$ → Tekrarlayan integral eşitliğin soluna atılır, hesaplanacak integral ile toplanır ve başındaki sabit sağ tarafa geçirilir.

$\int e^{2x}cos3x.dx = \frac{3}{13}e^{2x}sin3x + \frac{2}{13}e^{2x}cos3x + c$

Örnek: $\int x^2e^{-x}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: x^2=u → du=2xdx, e^{-x}dx=dv → v=-e^{-x} ; $=-x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$ → tekrar kısmi integral, x=u →du=dx, e^{-x}dx=dv → v=-e^{-x} ; $\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$

Örnek: $\int \sin^{-1}x.dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = \sin^{-1}x \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $dv = dx \rightarrow v = x$; $= x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

LAPTÜ Tablo yöntemiyle integral alma: " LAPTÜ; Logaritma, arc (ters trigonometik), polinom, trigonometrik, üstel anlamındadır. İntegral içinden türevi ve integrali alınacak fonksiyonlar belirlenerek, türev alımı sıfırlayıncaya veya tekrar aynı fonksiyonlar elde edilinceye kadar içlem tekrarlanır. Sonra sırayla + ve – işaretleriyle çapraz çarpımlar yapılıp, bulunan ifadeler toplanarak sonuç elde edilir. Tekrarlama durumunda ise bulunan ifadenin son satırı için N=1-a.b katsayılar çarpımından integralin katsayısı elde edilir ve bu katsayı bulunan ifadeye bölünür. "

Örnek: $\int x^2.cosx.dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Türev	İntegral
x^2	$cosx$
$2x$	$-sinx$
2	$-cosx$
0	-sinx

$\int x^2.cosx.dx$ =x^2sinx+2x.cosx-2sinx+c

Örnek: $\int x^3.e^{-2x}.dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Türev	İntegral
x^3	e^{-2x}
$3x^2$	$\frac{-1}{2}e^{-2x}$
$6x$	$\frac{1}{4}e^{-2x}$
6	$\frac{-1}{8}e^{-2x}$
0	$\frac{1}{16}e^{-2x}$

$$\int x^3e^{-2x}dx = e^{-2x}\left(\frac{-1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right) + c$$

Örnek: $\int sinx.cos2x.dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek: $\int e^{-2x}sin3x.dx$ integralini hesaplayız.

Trigonometrik fonksiyonların kuvvetleri integralleri:

$\int \sin^m x.\cos^n x.dx$ tipindeki integrallerde m ve n nin tek veya çift pozitif tam sayı olma durumu dikkate alınır. Sinx veya cosx çarpanı şeklinde yazılarak ve "$\sin^2$x=(1/2)(1-cos2x), $\cos^2$x=(1/2)(1+cos2x), sinx.cosx=(1/2)sin2x" özdeşlikleri kullanılarak integral hesaplanır.

Örnek: $\int sin^3x.cos^2x.dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int sin^3x.cos^2x.dx = \int(1-cos^2x)sinxcos^3xdx = -\int(1-u^2)u^2du = \frac{-cos^3x}{3} + \frac{cos^5x}{5} + c$

Örnek: $\int sin^4x.dx = \int(1-cos^2x)sin^2x.dx = \int sin^2xdx - \int sin^2xcos^2xdx = \frac{1}{2}\int(1-cos2x)dx - \frac{1}{4}\int sin^2 2xdx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin2x\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}sin4x\right) + c$

Örnek: $\int tan^2x.secx.dx = \int(sec^2x-1)secxdx = \int sec^2x.secxdx - \int secxdx = \frac{1}{2}secxtanx - \frac{1}{2}\ln(secx + tanx) + c$

Farklı periyotlu trigonometrik fonksiyonların çarpımı integrali:

1)$\int sinmx.cosnx.dx$, 2) $\int sinmx.sinnx.dx$, 3) $\int cosmx.cosnx.dx$. Bu tip integralleri hesaplarken;

1)sinmx.cosnx=(1/2)[sin(m+n)x+sin(m-n)x], 2)sinmx.sinnx=(1/2)[cos(m-n)x-cos(m+n)x], 3)cosmx.cosnx=(1/2)[cos(m-n)x+cos(m+n)x] eşitlikleri kullanılır.

Örnek: $\int sin3x.cos2x.dx = \frac{1}{2}\int(sin5x + sinx)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{5}cos5x - cosx\right) + c$

Örnek: $\int cos3x.cos5x.dx$ integralini hesaplayınız.

Alıştırmalar:

1)$\int(ax^3+b)^2dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{a^2}{7}x^7 + \frac{ab}{2}x^4 + b^2x + c$

2)$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{nx^{(n-1)/n}}{n-1} + c$

3)$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{3}{13}x^{13/3} - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - 3x^{-1/3} + c$

4)$\int \frac{dx}{2x+3}$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{2}ln|2x+3| + c$

5)$\int 3^xe^xdx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{(3e)^x}{\log(3e)} + c$

6) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{x^2}{2} + x + 2ln|x-1| + c$

7) $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$

8) $\int \frac{3x}{x^2+4x-1} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{2} ln|(x+2)^2 - 5| - \frac{1}{\sqrt{5}} ln \left|\frac{(x+2)-\sqrt{5}}{(x+2)+\sqrt{5}}\right| + c$

9) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\sqrt{x^2-4} + 3ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + c$

10) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{3} ln\left|x^3 + \sqrt{x^6-1}\right| + c$

11) $\int \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2+4} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{4}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 + c$

12) $\int xe^{-(x^2+3)} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{-1}{2} e^{-(x^2+3)} + c$

13) $\int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} dt$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\sin^{-1}(e^t) + c$

14) $\int xsin(3x^2+4) dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{-1}{6}\cos(3x^2+4) + c$

15) $\int \frac{1}{sinx.cosx} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $ln|tanx| + c$

16) $\int \frac{tan3x - cot3x}{sin3x} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{3} ln|sec3x + tan3x| + \frac{1}{sin3x} + c$

17) $\int \frac{1}{e^x+1} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $-ln|1+e^{-x}|+c$

18) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{-x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x+c$

19) $\int x.sinx.dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: sinx-xcosx+c

20) $\int x^2 e^{3x} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{27}e^{3x}(9x^2-6x+2)+c$

21) $\int (x^2-2x+5)e^{-x} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $-e^{-x}(x^2+5)+c$

22) $\int x.\tan^{-1}x.dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x+c$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x-3}{5}\right)+c$

24) $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{2}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\left(\frac{6x-1}{\sqrt{11}}\right)+c$

25) $\int \sqrt{x-x^2}\, dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\sin^{-1}(2x-1)+c$

26) $\int (cosx)^3 dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $sinx-\frac{1}{3}(sinx)^3+c$

27) $\int sin^2x.cos^3x.dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{3}sin^3x-\frac{1}{5}sin^5x+c$

28) $\int \frac{1}{sin^4x} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $-cotx - \frac{1}{3}cot^3x + c$

29) $\int sin3x.cos5x.dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{-1}{16}cos8x + \frac{1}{4}cos2x + c$

30) $\int cos\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{3}{5}sin\left(\frac{5x}{6}\right) + 3sin\left(\frac{x}{6}\right) + c$

31) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{12}ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right| + c$

32) $\int \frac{dx}{x^3+1}$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{6}ln\left|\frac{((x+1)^2}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$

33) $\int \frac{(2x-1)}{x(x-1)^2(x^2+1)} dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{-1}{2(x-1)} + ln\left|\frac{(x^2+1)^{1/2}}{x}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

34) $\int \frac{dx}{cosx+2sinx+3}$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\tan^{-1}\left(1 + tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$

35) $\int \frac{dx}{3sin^2x+5cos^2x}$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}tanx\right) + c$

36) $\int xe^x cosx.dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{2}e^x(xcosx + xsinx - sinx) + c$

BELİRLİ İNTEGRAL:

Kalkülüsün esas teoremi: " f, [a,b] aralığında sürekli bir fonksiyon ve F' de verilen aralıkta f'nin ters türevi ise $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ dır."

Örnek: $\int_0^2 (x^2 - 3x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{8}{3} - 6 + 2\right) - (0) = \frac{-4}{3}$

Örnek: $\int_{-\pi/6}^{\pi/3} sin2x.dx = \frac{-1}{2} cos2x \Big[_{-\pi/6}^{\pi/3} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$

Örnek: $\int_{-1}^{1} (x^2 + 2)dx = 2\int_0^1 (x^2 + 2)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]\Big[_0^1 = \frac{14}{3}$ (çift fonksiyon !)

Örnek: $\int_{-1}^{3} |x - 2|dx = \int_{-1}^{2} (-x + 2)dx + \int_2^3 (x - 2)dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]\Big[_{-1}^{2} + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]\Big_2^3 = 5$

Bu sonuç grafik çizilip alandan da bulunabilir.

Örnek: $\int_{-1}^{1} 2x.dx = x^2 \Big[_{-1}^{1} = 0$ (tek fonksiyon !)

Örnek: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2sinx + 3cosx)dx$ → sinx tek, cosx çift fonksiyondur ve integral sınırları simetriktir. Bu durumda tek fonksiyonun integrali sıfır, çift fonksiyonun $6\int_0^{\pi/2} cosxdx = -6$ olur.

Örnek: $\frac{d}{dx}\int_3^{6x-1} \sqrt{4t + 9}.dt = \left[\frac{d}{dx}(6x - 1) - \frac{d}{dx}(3)\right]\sqrt{4(6x - 1) + 9} = 6\sqrt{24x + 5}$

Örnek: $\frac{d}{dx}\int_{\pi}^{\sqrt{x}} sint^3.dt$

İNTEGRALİN UYGULAMALARI:

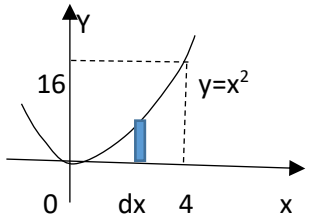
1)Alan hesabı:

a)Fonksiyon eğrisi ile koordinat ekseni arasındaki sınırlı alan:

f(x) in tanımlı olduğu bölge içinde [a,b] arasındaki alan → $\int_a^b f(x)dx$ dir.

Örnek: f(x)=x^2 nin [0,4] arasındaki toplam alanı kaç br^2 dir?

Çözüm:



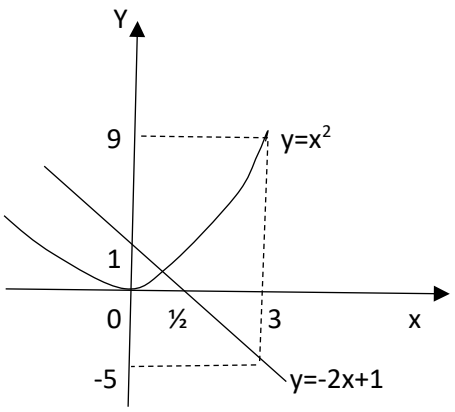
$$A = \int_0^4 x^2.dx = \frac{x^3}{3}\Big[_0^4 = \frac{64}{3}$$

b)İki eğri arasında kalan alan:

f(x) ve g(x) eğrileri arasında kalan alan $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ dir (f(x)≥g(x)).

Örnek: f(x)=x^2 ile g(x)=-2x+1 fonksiyonları arasında [0,3] aralığındaki toplam alanı bulunuz.

Çözüm:

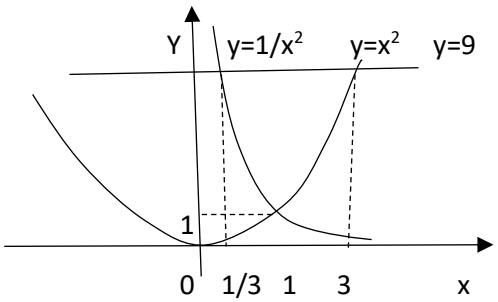


Fonksiyonların kesim noktası x^2=-2x+1 → x^2+2x-1=0 → $x = \sqrt{2} - 1$ olur.

$$A_T = \int_0^{\sqrt{2}-1}[(-2x+1) - x^2]dx + \int_{\sqrt{2}-1}^{3}[x^2 - (-2x+1)]dx = |-15|$$

Örnek: y=x^2, y=1/x^2 ve y=9 arasında birinci bölgede kalan alanı hesaplayınız.

Çözüm:

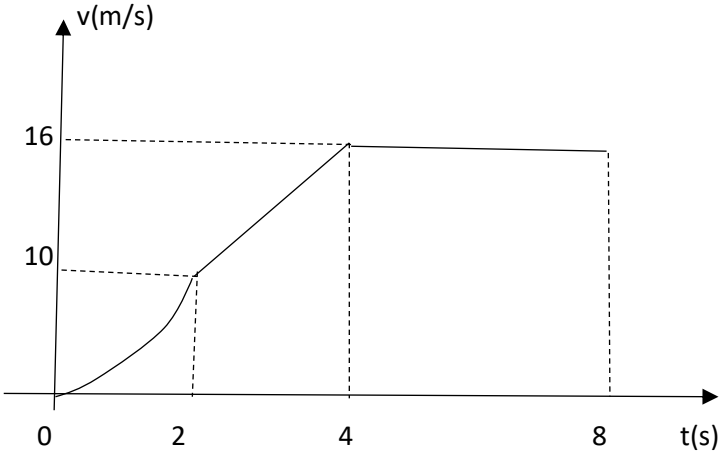


I.Yol: Kesim noktaları 1/x^2=9 → x=1/3 , x^2=1/x^2 →x=1 ve x^2=9 →x=3 (birinci bölgede).

$$A = \int_{1/3}^{1}\left(9 - \frac{1}{x^2}\right)dx + \int_1^3 (9 - x^2)dx = \frac{40}{3}$$

II.Yol: x=$y^{1/2}$, x=$y^{-1/2}$ → $A = \int_1^9 \left(y^{1/2} - y^{-1/2}\right)dy = \frac{40}{3}$

Örnek: Durgun halden harekete başlayan ve bir doğru boyunca hareket eden bir cismin hız zaman grafiği şekildeki gibidir. (0-2)s aralığında cismin ivme fonksiyonu a(t)=5t m/s^2 olduğuna göre, 8 saniyede yol kaç m dir?



Çözüm: 0-2 s aralığında; $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t 5t.dt \rightarrow v = \frac{5}{2}t^2 \rightarrow v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_0^x dx = \int_0^2 \frac{5}{2}t^2\, dt \rightarrow x = \frac{10}{3}$ m

2-4 s arasında; $v = 4 + \frac{(16-10)}{(4-2)}t = 4 + 3t \rightarrow \int_0^x dx = \int_2^4 (4+3t)dt \rightarrow x = 26$ m

4-8 s arasında; v=16 → $\int_0^x dx = \int_4^8 16.dt \rightarrow x = 64$ m. Toplam yol x_{Top}=(10/3)+26+64=290/3 m olur.

Yay uzunluğu:

“ f fonksiyonu, f’ [a,b] aralığı üzerinde sürekli olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bu durumda aralık üzerinde y=f(x) in grafiğinin L uzunluğu; $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.dx$ olur”.

Örnek: $y=x^2$ eğrisi üzerinde A(6, 36) metre noktasından serbest bırakıldığında sürtünmesiz olarak hareket eden bir boncuk, bir tur atarak harekete başladığı noktaya geri dönüyor. Boncuk toplam kaç metre yol almıştır?

Çözüm: $y=x^2 \rightarrow y'=2x \rightarrow L_{top} = 4\int_0^6 \sqrt{1+(2x)^2}dx = 4\left(x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{1+4x^2}\right|\right)\Big[_0^6 = 295{,}36$ m

KATI CİSİMLERİN HACİMLERİ:

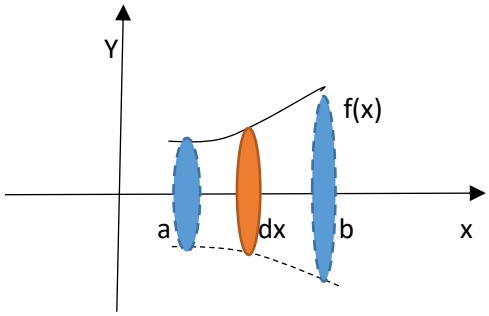
1)Dilimleme yöntemi: “V, x=a ve x= b’de x ekseniyle sınırlanan bir katı cismin hacmi olsun. Eğer A(x) [a,b] aralığında x eksenine dik düzlem tarafından oluşturulan katı cismin kesit alanını veren sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda katı cismin hacmi; $V = \int_a^b A(x).dx$ dir.”

Örnek: Tabanı $x^2+y^2=2^2$ şeklinde daire olan bir katı cismin x eksenine dik seçilen bir kare yüzey plakasını alanı $a(x)=16-4x^2$ ise [-2,2] aralığında bu cismin hacmi nedir?

Çözüm: $V = \int_{-2}^{2}(16-4x^2)dx = (16x^2 - \frac{4}{3}x^3)\Big[_{-2}^{2} = \frac{128}{3}$ br³

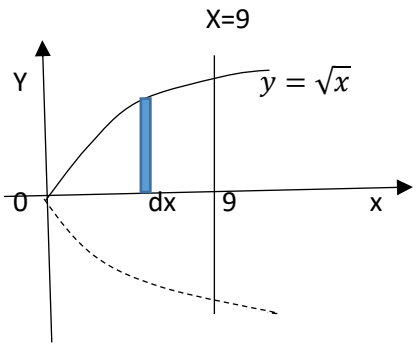
2)Disk yöntemi:

$\mathrm{A(x)} = \pi r^2 = \pi[f(x)]^2 \rightarrow V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$



Örnek: $y = \sqrt{x}$, y=0 ve x=9 ile sınırlanan bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini bulunuz.

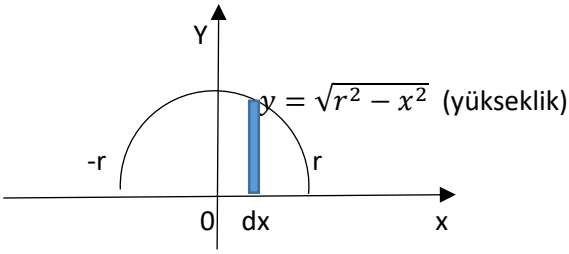
Çözüm:



$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$ I.bölgede, $V = \int_0^9 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_0^9 x.dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big[_0^9 = \frac{81}{2}\pi$

Örnek: Yarıçapı r olan kürenin hacmini bulunuz.

Çözüm:



$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big[_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3$

3)Pul metodu:

"x=a ve x=b doğruları ve y=f(x), y=g(x) sürekli fonksiyonlarının grafikleri x ekseni etrafında döndürülürse oluşan katı cismin hacmi; $V=\int_a^b \pi[f(x)^2-g(x)^2]dx$ dır (f(x)>g(x))".

Örnek: $y=x^2$ ve y=4x in I.bölgede grafikleri arasında kalan bölgenin +x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonların kesim noktaları $x^2=4x$ → x(x-4)=0 → x=0 ve x=4 dür.

$V=\int_0^4 \pi[(4x)^2-(x^2)^2]dx=\pi\int_0^4(16x^2-x^4)dx=\frac{2048}{15}\pi$

4)Kabuk metodu:

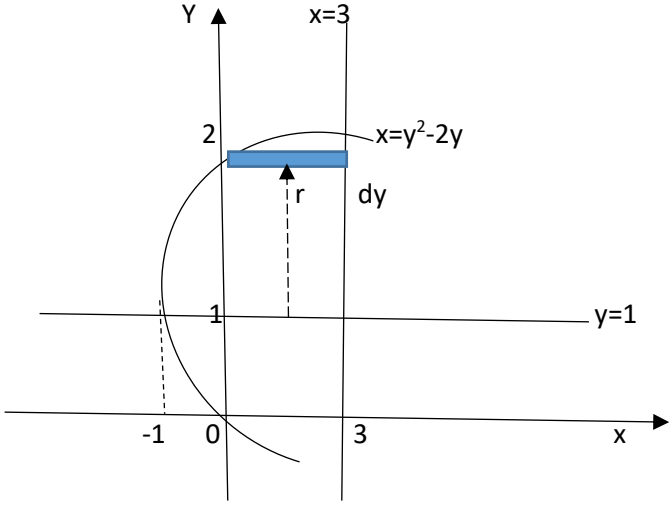
Hacim=uzunluk x genişlik x kalınlık →V=2πrht → $V=2\pi\int_a^b x.f(x).dx$

Örnek: π≥x≥0 olmak üzere $y=\sin x^2$ ve y=0 grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: $V=2\pi\int_0^{\sqrt{\pi}} x.\sin x^2.dx=2\pi\int \sin u.du=-2\pi\cos u=-2\pi\cos x^2\Big[_0^{\sqrt{\pi}}=2\pi$

Örnek: $x=y^2-2y$ ve x=3 ün grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin y=1 doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



$Y^2-2y=3$ → $y^2-2y-3=0$ → y=-1 ve y=3 → $h=3-x_k=3-y^2+2y$, $r=y_k-1=y-1$, $t=\Delta y_k=dy$; V=2πrht.

$V=2\pi\int_1^3(y-1)(3-y^2+2y)dy=2\pi\int_1^3(-y^3+3y^2+y-3)dy=8\pi$

Örnek: $y=(x-1)^2$ ve y=1 arasındaki bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini bulunuz. (cevap: 8π/5)

DÖNEL YÜZEY ALANI:

"f, [a,b] aralığında bütün x değerleri için f' sürekli ve f(x)≥0 olacak şekilde bir fonksiyon olsun. [a,b] aralığında f' nin grafiğinin x ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen S yüzey alanı; $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ dir.

Örnek: [1,4] aralığında y=2x 'in grafiğinin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan S yüzey alanını bulunuz.

Çözüm: $S = 2\pi \int_1^4 x\sqrt{1+2^2}.dx = 15\sqrt{5}\pi$

Bir fonksiyonun ortalama değeri:

"y=f(x), [a,b] aralığında sürekli olsun. Bu aralık üzerinde fonksiyonun ortalama değeri; $f_{ort} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$ dir."

Örnek: $y=(x)^{1/2}$ fonksiyonunun [0,9] aralığında ortalama değerini bulunuz.

Çözüm: $f_{ort} = \frac{1}{9-0}\int_0^9 x^{1/2}.dx \ = \frac{1}{9}.\frac{2}{3}x^{3/2}\Big[_0^9 = 2$

İş, kütle/ağırlık merkezi, akışkanlarda kuvvet:

iş→ $W = \int_a^b F(x).dx$, ağırlık merkezi → $\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$ ve $\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2dx}{\int_a^b f(x)dx}$, akışkan içinde kuvvet → $F = \int_a^b \rho.x.w(x).dx$ (ρ: yoğunluk, x:derinlik, w(x): akışkan içindeki cismin yüzey alanı)

Örnek: Bir yay bağlı 2 kg kütleli bir cisim sürtünmesiz yatay düzlemde denge konumundan x kadar uzaklıkta iken cisme F=-100x (N)'luk bir kuvvet etki ediyor. Cismi denge konumundan x=0,5 m uzağa götürmek için kaç Joule (N.m) iş yapılmalıdır? Cismi bu konumdan serbest bırakırsak maksimum hızı kaç m/s olur?

Çözüm: $W = \int_0^{0,5} 100x.dx = 50x^2\Big[_0^{0,5} = 12,5\,J$, $E_k=W=(1/2)m.v_m^2 \rightarrow 12,5=(1/2)2.v_m^2 \rightarrow v_m=5/(2)^{1/2}$ m/s.

Örnek: $y=x^2$ ve y=x arasında kalan bölgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: Bölgenin sınırları $x^2=x \rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow x=0$ ve x=1 olur.

$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(x-x^2)dx}{\int_0^1 (x-x^2)dx} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2}$, $\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^4)dx}{\int_0^1 (x-x^2)dx} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}$

Alıştırmalar:

1) $\int_{-2}^{2}(x-1)dx$ integralini hesaplayınız.

2) $\int_{-\pi/3}^{\pi} sin^2x.cosx.dx$ integralini hesaplayınız.

3) $\int_{-1}^{1}|x-1|dx$ integralini hesaplayınız.

4)$y=x^2$, $y=x+2$ doğruları arasında kalan alanı hesaplayınız.

5) $[0,\pi/2]$ aralığında $y=\sin x$ fonksiyonunun x ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cismin hacmini hesaplayınız.

6)$[0,\pi/2]$ aralığında $y=\cos x$ fonksiyonunun y ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cismin hacmini hesaplayınız.

7)$[0,2\pi]$ aralığında $y=\sin x$ ile $y=\cos x$ eğrileri arasında kalan alanı hesaplayınız.

8)Yükleri q , 3q, ve aralarındaki uzaklık 2r olan iki noktasal parçacık arasında elektrostatik itme kuvveti $F=(3/4)kq^2/r^2$ dir. Bu parçacıklar arasındaki uzaklığı 2 katına çıkarmak için elektriksel kuvvetlere karşı yapılması gereken iş kaç kq^2/r dir? Hesaplayınız.

9)Durgun halden harekete başlayan ve bir doğru boyunca (+x yönünde) hızlanan bir cismin ivme fonksiyonu $a(t)=2t-3$ (m/s^2) dir. Bu parçacık başlangıçta $x(0)=0$ noktasında olduğuna göre; t=4.saniyede hangi konumdadır? Hesaplayınız.

10) $y=x^3$ fonksiyonunun [0,2] aralığında ortalama değerini bulunuz.

DİZİLER VE SERİLER

"Tanım kümesi pozitif tamsayılar olan fonksiyona dizi denir. Genellikle a_n şeklinde gösterilir. a_1, a_2, a_3, … dizinin terimleri denir. Örneğin n tam sayı olmak üzere $f(n)=(1+1/n)^n$ fonksiyonu.

Yakınsak dizi: "Bir $\{a_n\}$ dizisi ve bir L reel sayısı verilsin eğer her $\epsilon > 0$ için bir pozitif N tamsayısı n>N olduğunda $|a_n-L|<\epsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, $\{a_n\}$ dizisine L sayısına yakınsaktır denir ve l sayısına da dizinin limiti adı verilir; $\lim_{n\to\infty} a_n = L$."

Iraksak dizi: " a_n yakınsak olmadığında, yani $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (limit mevcut değil) ise ıraksaktır".

Sabit dizi: "a_n bir dizi ve n≥1 için $f(n)=a_n$ olmak üzere bir f fonksiyonu olsun. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \to \lim_{n\to\infty} a_n = L$ dir".

Örnek: $\{(n+1)^{1/n}\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x)=(x+1)^{1/x}$ fonksiyonu alalım. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty^0$ belirsizliği vardır. L'Hospital uygulanırsa;

$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln(x+1) = \lim_{x\to\infty} \frac{1/(x+1)}{1} = 0 \to \lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1$, dizi 1'e yakınsar.

"$r \neq 0 \to |r| < 0 \to \{r^n\}$ dizisi sıfıra yakınsaktır, $|r| > 0$ ise ıraksaktır".

Sıkıştırma teoremi: "kabul edelim ki $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri arasında bir indisten sonraki bütün n değerleri (n>N) için $a_n \leq c_n \leq b_n$ eşitliğini sağlasın. Eğer $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri aynı L sayısına yakınsar ise $\{c_n\}$ dizisi de L sayısına yakınsaktır".

Monoton dizi: " $\{a_n\}$ dizisi için;1) n≥1 için $a_{n+1}>a_n$ ise dizi artandır. 2) n≥1 için $a_{n+1}\geq a_n$ ise dizi azalmayandır. 3) n≥1 için $a_{n+1}<a_n$ ise dizi azalandır. 4) n≥1 için $a_{n+1}\leq a_n$ ise dizi artmayandır.

Bu tiplerden her hangi birisini sağlayan $\{a_n\}$ dizisine <u>monotondur</u> denir."

Örnek: $\{n/e^n\}$ dizisinin monotonluğunu gösterin.

Çözüm: I.yol: $f(x)=x/e^x \to f(n)=a_n$, x>1 için $f'(x)=(1-x)/e^x<0$ olduğundan f fonksiyonu [1,∞) aralığında azalandır. Bu durumda $f(n+1)=a_{n+1}<f(n)=a_n$.

II.Yol: Oran kuralına göre; $a_{n+1}/a_n=[(n+1)/(e^{n+1})][e^n/n]=(n+1)/(ne)=(1/e)+(1/ne)<(1/e)+(1/e)=(2/e)<1$. Yani n≥1 için $a_{n+1}>a_n$ dir. Bu durumda dizi azalandır.

SERİLER:

" Eğer $\{a_n\}$ dizisinin terimleri a_1, a_2, ..a_n, … ise bunların toplamına $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ bir sonsuz seri, veya kısaca seri denir.

K=1,2,3,… için a_k sayılarına serinin terimleri a_n sayısına da <u>genel terimi</u> denir. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ veya $\sum a_k$ şeklinde gösterilir."

$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ya serinin n.kısmi toplamı denir. Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise sonsuz seriye yakınsaktır denir; $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$ dir. S sayısına serinin toplamı denir. S mevcut değilse seri ıraksaktır.

1)Geometrik seri: "$a \neq 0$, a ve r sabit reel sayılar olmak üzere $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ şeklindeki seriye <u>geometrik seri</u> denir. Eğer |r|<1 ise <u>seri yakınsaktır</u> ve toplamı $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}$, $a \neq 0$ dır. |r|≥1 ise geometrik seri <u>ıraksaktır</u>."

İspat; $S_n=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots \to S_n-a=r(a+ar+\ldots) \to S_n=a/(1-r)$.

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ geometrik serisinin toplamı kaçtır?

Çözüm: Burada a=1 ve r=(-1/2) dir. |r|<1 olduğundan seri yakınsaktır ve $S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$

Örnek: Yerden 20 metre yükseklikten serbest bırakılan bir top her yere çarptığında bir önceki yüksekliğinin yarısı kadar yükseğe çıkıyor. Topun her yere düştüğü yükseklik ile yere çarpma süresi t (saniye) arasında, $y(t)=5t^2$ (metre) bağıntısı olduğuna göre;

a)Duruncaya kadar top toplam kaç metre yol alır?

b)Top kaç saniye sonra durur?

Çözüm:

a)$y_T = H\left(2.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2^2} + 2.\frac{1}{2^3} + \cdots\right) = 40\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) = 40\left(-1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) = 40(-1+2) = 40$ m

b)$t = \sqrt{\frac{y}{5}} \rightarrow T = \sqrt{\frac{H}{5}}\left(1 + 2.\frac{1}{2^{1/2}} + 2.\frac{1}{2^1} + 2.\frac{1}{2^{3/2}} + \cdots\right) = \sqrt{\frac{20}{5}}\, 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^{3/2}} + \cdots\right) \rightarrow T = 4\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}\right) - \frac{1}{2}\right] = \frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2-1}}$ saniye.

2)Harmonik seri:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ şeklindeki ıraksak seridir. Harmonik serinin kısmi toplamlar dizisinin n.terimi $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ şeklinde olup bu dizinin terimlerine harmonik sayılar denir.

İntegral testi: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitif terimli bir seri ve f sürekli fonksiyonu negatif olmayan, [1,∞) aralığı üzerinde azalan ve k≥1 için $f(k)=a_k$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Eğer $\int_1^{\infty} f(x)dx$ yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak, ıraksak ise ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{lnk}{k}$ serisinin yakınsaklığını integral testi kullanarak inceleyiniz.

Çözüm: f(x)=lnx/x fonksiyonu [2,∞) aralığı üzerinde; $\int_2^{\infty} \frac{lnx}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{lnx}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}(lnx)^2 \Big[_2^b = \infty$ genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Karşılaştırma testi: Bir serinin yakınsaklığı ve ıraksaklığı bilinen bir seri ile karşılaştırılarak serinin durumunun belirlenmesidir.

Limit oran testi: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, L sonlu ve L>0 ise iki seri de yakınsaktır ya da iki seri de ıraksaktır.

Oran testi: : $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ ise; L<1 iken seri yakınsak, L>1 iken ıraksak, L=1 iken sonuç vermez.

TAYLOR SERİSİ:

Bir f fonksiyonu, (a-R, a+R) aralığında $f(x) = \sum c_k (x-a)^k$ kuvvet serisi gösterimine sahip ise, c_k katsayıları $c_k=f^{(k)}(a)/k!$ Dir. bu durumda fonksiyona $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ şeklindeki a merkezli veya a noktasındaki f fonksiyonunun <u>Taylor serisi</u> adı verilir.

Örnek: f(x)= sinx fonksiyonunun a=π/6 merkezli Taylor serisini bulunuz.

Çözüm: f(x)=sinx → f(π/6)=$\frac{1}{2}$, f'(x)=cosx → f'(π/6)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, f''(x)=-sinx→ f''(π/6)= $\frac{-1}{2}$, …

$$f(x) = sinx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{k!}(x - \frac{\pi}{6})^k$$

MACLAURİN SERİSİ:

a=0 merkezli Taylor serisine <u>Maclaurin serisi</u> denir. $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k$

Örnek: f(x)=e^x fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

Çözüm: f(x)=e^x → f(0)=1, f'(x)=e^x→f'(0)=1, f''(x)=e^x→f''(0)=1, …$f^{(n)}(x)=e^x$→$f^{(n)}(0)=1$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

BİNOM SERİLERİ:

M pozitif tamsayı olmak üzere; $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots . + mx^{m-1} + x^m$ ifadesine $(1+x)^m$ nin Binom açılımı denir. Toplam sembolü ile Binom açılımı $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$ şeklindedir. açılımda x'in başındaki katsayılara Binom katsayıları denir. r her hangi bir reel sayısı için f(x)=$(1+x)^r$ fonksiyonunun Maclaurin serisi de Binom serisini oluşturur.

Örnek: ışık hızına yakın v hızıyla bir doğru boyunca hareket eden m durgun kütleli bir parçacığın kinetik enerjisi $E = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$ şeklindedir. Burada c ışığın boşluktaki hızıdır (sabit). Bu parçacığın düşük hızlarda (v<<c) kinetik enerjisini bulunuz.

Çözüm: v^2/c^2=-x olsun. Bu durumda $E = mc^2\left[(1+x)^{-1/2} - 1\right]$ olur. ; $(1+x)^{-1/2} = 1 + \frac{(-\frac{1}{2})}{1!}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \cdots$ $=1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots \rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2$

Alıştırmalar:

1)İç direnci önemsiz ve emk'sı E olan bir üreteçe; direnç değerleri r_0, nr_0, n^2r_0, n^3r_0, n^4r_0,… şeklinde sonsuz tane direnç paralel bağlanıyor (n>1 şeklinde bir sayı ve r_0 sabit direnç). Bu devrenin eşdeğer direnci (toplam direnci) kaç r_0 olur? Hesaplayınız.

2) f(x)=lnx fonksiyonunun a=1 merkezli Taylor serisini bulunuz.

3) f(x)=cosx fonksiyonunun a=π/3 merkezli Taylor serisini bulunuz.

4) f(x)=sinx fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

5) $y=(3)^{1/2}$ ifadesini binom serisine açarak virgülden sonraki üç basamağını yazınız.

KONİKLER VE KUTUPSAL KOORDİNATLAR:

Parabol, çember, hiperbol ve elips gibi eğrilerin denklemleri $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ denkleminden elde edilebilir. Örneğin A=C=1 ve B=0 durumu $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ çemberin genel denklemidir ve $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ dir. Çemberin merkezi ise M(-D/2, -E/2)=M(a,b) dir. Bu durumda çember denklemi $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ olur.

Parabol:

Bir parabol, düzlemde <u>doğrultman</u> adı verilen sabit bir L doğrusuna uzaklığı, <u>odak</u> adı verilen sabir bir F noktasına uzaklığına eşit olan bütün P(x,y) noktalarının kümesidir. Odaktan geçen ve parbole dik olan eksene parabolün ekseni denir. odağı F(0,p) ve doğrultmanı y=-p olan parabolün standart denklemi $x^2=4py$ dir. Odağı F(p,0) ve doğrultmanı x=-p olan pabolün denklemi ise $y^2=4px$ dir.

Elips:

Bir elips, düzlemde iki tane F_1 ve F_2 noktalarına uzaklıklarının toplamı sabit olan bütün P(x,y) noktalarının kümesidir. F_1 ve F_2 ye elipsin <u>odakları</u>, odakları birleştiren doğrunun orta noktasına da <u>merkezi</u> denir. merkezi M(0,0), odakları $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c,0)$ olan elipsin standart denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dir. Burada a, odaklardan elips üzerindeki bir P(x,y) noktasının odaklara uzaklıkları toplamının yarısıdır ve $b^2=a^2-c^2$ dir. Asal eksen uzunluğu 2a, yedek eksenin uzunluğu ise 2b dir.

Örnek: $4x^2+16y^2-8x-96y+84=0$ denkleminin gösterdiği elipsin odaklarını ve tepelerini bulunuz.

Çözüm: x^2 ve y^2 li terimlerin katsayılarını 1 yapmalıyız. Tüm terimler 4'e bölündüğünde; $x^2+4y^2-2x-24y+21=0$ olur. $(x^2-2x+1)+4(y^2-6y+9)+(21-1-36)=0 \rightarrow (x-1)^2+4(y-3)^2=16 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=1$

M(1,3), $c^2=a^2-b^2=12$ $c=\pm 2\sqrt{3}$, $F_1\left(1-2\sqrt{3},0\right), F_2\left(1+2\sqrt{3},0\right)$

Hiperbol:

Bir hiperbol, düzlemde iki tane F_1 ve F_2 noktalarına uzaklıkları farkı sabit olan bütün P(x,y) noktalarının kümesidir. F_1 ve F_2 yi birleştiren doğru parçasının orta noktasına hiperbolün merkezi denir. $|d_1-d_2|=k \rightarrow k=2a$ ve hiperbolün standart denklemi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ olur. Burada $b^2=c^2-a^2$ dir. Her hiperbol merkezinden geçen iki eğik asimtota sahiptir. Asimtot denklemi $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ dir. $x\rightarrow-\infty$ veya $x\rightarrow\infty$ iken y=(b/a)x ve y=-(b/a)x olur. Bir elips ve bir hiperbolün dış merkezlik sayısı e=c/a dır $(c=(a^2+b^2)^{1/2})$.

Örnek: $4x^2-y^2-8x-4y-4=0$ hiperbolünün merkezini, tepelerini odaklarını ve asimtotlarını bulunuz.

Çözüm: x ve y li terimleri parantez karesi şeklinde yazarız. $4(x^2-2x+1)-(y^2+4y+4)+(-4-4+4)=0 \rightarrow 4(x-1)^2-(y+2)^2=4 \rightarrow$ $\frac{(x-1)^2}{1^2}-\frac{(y+2)^2}{2^2}=1$. Bu durumda M(1,-2), $c=\pm\sqrt{5}$, $F_1\left(1-\sqrt{5},-2\right), F_2\left(1+\sqrt{5},-2\right)$; asimtotlar ise $y+2=\pm 2(x-1)$ $\rightarrow$ y=-2x ve y=2x-4 olur.

Parametrik denklemler:

"f ve g, ortak bir I aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlar olmak üzere, x=f(t) ve y=g(t) şeklinde t parametresine bağlı denklemlere parametrik denklemler denir.

Örnek: $x^2+y^2=r^2$ çemberinin bir parametrizasyonunu bulunuz.

Çözüm: $[0,2\pi]$ aralığında x=r.cost, y=rsint olur. Burada t açıdır.

Alıştırmalar:

1) $X^2+2y^2+2x-4y+5=0$ nin merkezini bulunuz.

2) Bir cisim x-y koordinat sisteminin başlangıç noktasından +x ekseniyle θ_0 açısı yapacak şekilde v_0 ilk hızıyla atılıyor. Sürtünmeler önemsiz olup yer çekimi ivmesinin büyüklüğü g dir. Cismin her hangi bir andaki konumunun koordinatlarını t zaman parametresine bağlı olarak bulunuz.

3) Yarıçapı r olan bir çemberin yatay bir düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanması ile çember üzerindeki sabit bir noktanın çizdiği eğriye sikloid eğrisi denir. Bu sikloidin parametrik denklemini θ açı parametresine bağlı olarak bulunuz.

4) Helis üzerinde her hangi bir t anında bir P(x,y,z) noktasını $\theta=w_0t$ ye bağlı olarak yazınız. Helis yarıçapını a ve boyunu b alınız (sabit).

Mehmet Taşkan

www.fizikselevren.com

Kaynaklar:

1)Dennis G.Zill, Warren S.Wright, " Matematik " cilt-1, cilt-2 (Calculus), 4.baskıdan çeviri, Çeviri editörü: Prof.Dr. İsmail Naci Cangül, Nobel yayınları, 2020, 2017.

2)Prof.Dr. Ahmet A.Karadeniz, "Yüksek matematik" cilt-1 , cilt-2, cilt-2, 8.baskı, Çağlayan Kitabevi, 2000, İstanbul.

3)Prof Dr.Coçkun Önem, "Mühendislik ve Fizikte Matematik Metotlar", 3.baskı, Birsen Yayınevi, 2003, İstanbul.