

MÜHENDİSLİK VE FİZİKTE MATEMATİK YÖNTEMLER-3

İÇİNDEKİLER:

1) LİNEER CEBİR (Metrisler, determinantlar, lineer denklem sistemleri)

2) ÖZEL DENKLEMLER VE ÖZEL FONKSİYONLAR (Gama ve beta fonksiyonları, parçalı türevli diferansiyel denklemler, Schrödinger denklemi, Bessel fonksiyonları, Legendre polinomları, Hermite polinomları, Laguerre polinomları, Küresel harmonikler, Euler-Lagrange denklemleri, Varyasyonlar hesabı)

BÖLÜM-1

LİNEER CEBİR

(MATRİSLER VE DETERMİNANTLAR)

MATRİSLER

1) MATRİSLERE GİRİŞ:

Matris kelimesi ilk defa 1850 lerde matematikçi J.J.Sylvester tarafından kullanılmış, matris teorisi ise W.R.Hamilton ve A.Cayley tarafından geliştirilmiştir. 1925'lerden sonra da fiziğin bir çok alanında kullanılmıştır.

Matris, satır ve sütun şeklinde dizilen elemanların dikdörtgensel düzenidir. M tane satır ve n tane sütundan oluşan (mxn) bir A

matrisi $A = [a_{ij}]_{(m,n)} = a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanır.

Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise **kare matris** denir. Bir kare matrisin aynı satır ve sütun indisli a_{ii} elemanlarına matris **köşegen**, bu elemanların dışındakilere de **köşegen dışı** elemanlar denir. Bir kare matrisin köşegen dışı elemanlarının sıfır olması durumunda matrise **köşegen matris** ve köşegen elemanları aynı olan matrise de **skaler matris** denir.

$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}$ matrisi alt üçgen matris, $I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij}$ (Kronecker deltası) **birim matris**.

Tüm elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir. İki matrisin bir birine eşit olması için karşılıklı elemanların bir birine eşit olması gerekir. Sadece bir satırdan oluşan matrise **satır matrisi**, bir sütundan oluşan matrise de **sütun matrisi** denir.

2) MATRİS İŞLEMLERİ:

a) Toplama işlemi:

Matrislerin toplanabilmesi için mertebelerinin (mxn) eşit olması gerekir. $C=A+B \rightarrow c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow C = A + B = \begin{bmatrix} 1+4 & -2+3 \\ 3-1 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Özellikler:

1) $A+0=A$, 2) $0.A=0$, 3) $A+B=B+A$ (Değişme özelliği), 4) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (Birleşme özelliği), 5) $\alpha.(A+B)=\alpha.A+\alpha.B$ (Dağılma özelliği), 6) $1.A=A$, 7) $C=A-B=A+(-B)$ (Çıkarma işlemi).

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ise $2A-3B$ nedir?

Çözüm: $2A - 3B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -12 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -6 \\ -10 & -17 \end{bmatrix}$

b) Çarpma işlemi:

$A_{m \times s}$ ve $B_{s \times n}$ şeklinde birinin sütun sayısı diğerinin satır sayısına eşit olan matrisler bir biriyle çarpılabilir. Bu durumda elde edilen matris; $A_{m \times s} \times B_{s \times n} = C_{m \times n}$ boyutunda olur. $C=A.B \rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}$ ($i=1,2,3,..m, j=1,2,3,..n$) çarpımı **Cayley** ya da **Matris çarpımı** olarak adlandırılır. Bir satır matrisi ile bir sütun matrisinin çarpımından (bu iç ya da nokta çarpımıdır) bir sayı elde edilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A.B=C$ nedir?

$$\text{Çözüm: } C = \begin{bmatrix} (1.0 + 3.3 + 5.0) & (1(-2) + 3.2 + 5.0) & (1.1 + 3.1 + 5(-1)) \\ (2.0 + 0.3 + 6.4) & ((2.(-2) + 0.2 + 6.0) & (2.1 + 0.1 + 6.(-1))) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -1 \\ 24 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Özellikler:

1) $A.B \neq B.A$, 2) $(A.B).C = A.(B.C)$ (Birleşme özelliği), 3) $A.(B+C) = A.B + A.C$ (Dağılım özelliği), 4) $\alpha.(A.B) = (\alpha.A).B = A.(\alpha.B)$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ile $B_{m \times m}$ matrislerinin direkt çarpımı (tensör çarpımı) $C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanır.

c) Bir matrisin türevi:

Bir matrisin türevi matristeki tüm elemanların tek tek türevleri alınarak bulunur.

$$\text{Örnek: } A = \begin{bmatrix} x & x^2 & \sin x \\ 3 & \ln x & e^{2x} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{dA}{dx} = ?$$

$$\text{Çözüm: } \frac{dA}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & \cos x \\ 0 & 1/x & 2e^{2x} \end{bmatrix}$$

d) Bir matrisin integrali:

Bir matrisin integrali matristeki tüm elemanların tek tek integralleri alınarak bulunur.

$$\text{Örnek: } \int_0^3 \begin{bmatrix} x & 2 & x^2 \\ -e^x & x^{1/2} & 0 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} x^2/2 & 2x & x^3/3 \\ -e^x & x^{-1/2}/2 & 0 \end{bmatrix}_{x=0}^{x=3} = \begin{bmatrix} 9/2 & 6 & 9 \\ -e^3 + 1 & 1/2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

e) Parçalı matrisler:

Bir matrisin matris elemanları sayı, fonksiyon ya da matris olabilir. Yüksek mertebeden bir matrisin daha küçük mertebeden alt matrislere bölünmesiyle elde edilen yeni matrise parçalı matris denir. Bu işlem matris çarpımında kolaylık sağlar.

$$\text{Örnek: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisinin alt matrislerini kullanarak (2x2) şeklinde yazınız.}$$

$$\text{Çözüm: Alt matrisler; } b_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, b_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}, b_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

DETERMİNATLAR:

1) DETERMİNANTLARA GİRİŞ:

Determinant kavramı ilk olarak 19.yy'da lineer denklem sistemleri çözülürken kullanılmıştır. Örneğin homojen olmayan iki bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi; $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ ve $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ olsun. Bu denklemin çözümü $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ iken vardır. Bu durumda $x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{\Delta}$ olur. $\Delta = 0$ ise çözüm yok veya sonsuz çözüm vardır. Buradaki Δ ya sistemin tamamlatıcısı anlamına gelen **determinant** denmiştir. Bu denklem sistemi $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ şeklinde katsayılar matrisiyle yazılabilir. Buradaki $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ matrisin determinantıdır. Ancak kare matrisin determinantı tanımlanabilir. Determinantlar açılarak (Laplace açılımı) tek bir sayı ya da fonksiyona indirgenebilir.

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij} \text{ (sabit i satırı için } j=1,2,\dots,n), \det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij} \text{ (sabit j satırı için } i=1,2,\dots,n).$$

Burada A_{ij} ye a_{ij} elemanının **minörü** denir ve A matrisinden a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen (n-1).mertebeden alt matrisin determinantına eşittir. $(-1)^{i+j}A_{ij}$ terimi ise a_{ij} elemanının **kofaktörü** ya da **eş çarpanı** olarak adlandırılır.

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ veya Laplace açılımı ile } \det A = \sum_{j=1}^2 a_{2j}(-1)^{2+j} A_{2j} = a_{21}(-1)^{2+1} A_{21} + a_{22}(-1)^{2+2} A_{22} \text{ (i=2 satırı için)} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \text{ olur. } \det A = \sum_{i=1}^2 a_{i1}(-1)^{i+1} A_{i1} = a_{11}(-1)^{1+1} A_{11} + a_{21}(-1)^{2+1} A_{21} \text{ (j=1 sütunu için)} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ bulunur.}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \sum a_{ij}(-1)^{i+j}A_{ij} \text{ determinantının 3.satıra göre açılımı; } \det B = \sum_{j=1}^3 b_{3j}(-1)^{3+j}B_{3j} (i=3)=$$

$$b_{31} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} - b_{32} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} + b_{33} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \text{ olur. Benzer olarak diğer satırlara göre de açılım yapılabilir.}$$

Determinantın özellikleri:

- 1) Bir determinantın bir satır ya da sütununun tüm elemanları sıfır ise determinant sıfırdır.
- 2) Bir determinantın iki satır ya da sütunu aynı ise determinant sıfırdır.
- 3) Bir determinantın bir satır ya da sütununun elemanları başka bir satır ya da sütununun elemanlarının bir sabitle çarpımlarına eşit ise, determinant sıfırdır.
- 4) Determinant da iki satır ya da sütunun yerleri değiştirilirse determinantın işareti değişir.
- 5) Determinantın aynı numaralı satırlarıyla sütunlarının yerleri değiştirildiğinde determinantın değeri değişmez.
- 6) Bir determinantın i.satırı veya j.sütununun bir c sabitiyle çarpımı determinantın c ile çarpımına eşittir.
- 7) Bir determinantın bir satır ya da sütunu bir sabitle çarpılır, bir başka satır ya da sütununa eklenirse, determinantın değeri değişmez.
- 8) Bir determinantın satır veya sütun elemanları bir toplam şeklinde yazılabiliyorsa, determinant iki determinantın toplamı şeklinde yazılabilir.
- 9) Bir determinantın türevi $\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{12} & \cdots & a'_{2n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & a'_{mn} \end{vmatrix}$
- 10) Bir determinantın bir satırı ya da sütununun bir sayı ile çarpılıp, bir satır ya da sütununa eklenmesi ile bir satır veya sütununda sıfırı bol satır veya sütun elde edilebilir (sıfırlama yöntemi). Determinantın sıfırın bol olduğu satır veya sütuna göre açılması bize kolaylık sağlar.

Matrislerin özellikleri:

1) **Transpoze (Devrik) Matris:** Her hangi bir matrisin satırlarını aynı numaralı sütunlar yapmak suretiyle elde edilen matrise, o matrisin transpozese ya da devriği denir. $A = a_{ij}$ olmak üzere $A^T = a_{ji}$ olur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

2) **Simetrik Matris:** Transpozese kendisine eşit olan kare matrise simetrik matris denir. $A = A^T$

Örnek: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow I^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) **Antisimetrik Matris:** Transpozese kendisinin eksi işaretlisine eşit olan matrise denir. $A = -A^T$. Gerçek bir A kare matrisi her zaman simetrik (R) ve antisimetrik (S) matrislerinin toplamı şeklinde yazılabilir. $R = (A + A^T)/2$ ve $S = (A - A^T)/2$

Örnek: $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2^T = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -\sigma_2$

4) **Kompleks eşlenik matris:** Bir matrisin kompleks eşleniği tüm matris elemanlarının kompleks eşleniği alınarak elde edilen matristir. $A^* = a_{ij}^*$ Eğer $A = A^*$ ise A matrisi gerçeldir.

Örnek: $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2^* = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

5) **Hermityen eşlenikmatris:** Bir matrisin kompleks eşleniğinin transpozese denir. $A^+ = A^{*T}$

6) **Hermityen matris:** Hermityen eşleniği kendisine eşit olan kare matrise denir. $A = A^+$

Örnek: $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2^* = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $(\sigma_2^*)^T = \sigma_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma_2$.

Eğer $A = -A^T$ ise A matrisine antihermityen denir. Bir hermityen matris gerçel ise $A^+ = (A^*)^T = A^T = A$ olacağından aynı zamanda simetriktir. Benzer şekilde antihermityen matris gerçel ise aynı zamanda antisimetriktir.

7)Kofaktör (eşçarpan) Matris: Bir kare matriste bir a_{ij} elemanının bulunduğu satırın ve sütunun silinmesi, a_{ij} elemanının yerine $(-1)^{i+j}A_{ij}$ yazılmasıyla elde edilen matristir. $A^c = \text{Cof}A$ olarak gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$, $A^{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $A^{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $A^{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$, $A^{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$, $A^{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$, $A^{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8$, $A^{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$, $A^{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow A^c = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 4 \\ 8 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

8)Bir matrisin adjointi (eki): Bir kare matrisin kofaktörünün transpozisine o matrisin adjointi denir. $\text{Adj}A = A^{cT} = (\text{Cof}A)^T$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $A^c = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $A^{cT} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \text{Adj}A$

9)Öz (self) adjoint matris: Bir kare matrisin adjointinin kendisine eşit olmasına denir. $\text{Adj}A = A$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ birim matrisi öz adjoint matristir.

10)Bir matrisin tersi: A ve B aynı mertebeden iki kare matris olmak üzere çarpımları birim matrise eşit oluyorsa, B matrisine A'nın tersi denir; $B = A^{-1} \rightarrow A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$.

Bir kare matrisin tersi, adjointinin matrisin determinantına bölünmesiyle elde edilir. $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)} = \frac{A^{cT}}{|A|}$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm: $\det A = 11 \rightarrow A^c = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow (A^c)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}}{11} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

Matrisin tersi indirgenmiş matris yöntemiyle de (**Gauss-Jordan yöntemi**) bulunabilir. Bunun için matrisin sağ tarafına birim matris yazılır ve matris satır eşelon yöntemiyle indirgenerek sol taraftaki matris birim matris yapılır. Bu durumda sağdaki matris ters matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin, satır indirgenmiş basamak matris kullanarak, tersini bulunuz.

Çözüm: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$R_2 \rightarrow (R_2 + R_1) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow (R_3 - R_1) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_1 \rightarrow (R_1 + R_2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow (R_3 - 2R_2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_1 \rightarrow (R_1 - R_3) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow (R_2 - 2R_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

11)Dik (ortogonal) matris: Bir A kare matrisi ile bu matrisin transpozunun çarpımı birim matrise eşitse, A matrisine dik matris denir. $A.A^T=A^T.A=I$ veya $A^T=A^{-1}$

Gerçek bir matrisin sütun ya da satır matrisleri de diktir. Dik bir matrisin determinanı ± 1 dir.

12)Birimsel (üniter) matris: Bir kare matrisin hamiltoniyen eşleniği ile çarpımı birim matrise eşit ise bu matrise birimsel (üniter) matris denir. $A.A^+=A^+.A=I$ veya $A^+=A^{-1}$. Birimsel bir matrisin satır ya da sütun matrisleri de birimseldir.

$$\text{Örnek: } A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & -1+i \\ 1+i & 1+i \end{bmatrix}, A^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & -1-i \\ 1-i & 1-i \end{bmatrix}, A^{*T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1-i & 1-i \end{bmatrix},$$

$$A.A^+ = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1-i & -1+i \\ 1+i & 1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1-i & 1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2+2 & 0 \\ 0 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

13)Bir matrisin izi (Trace): Bir kare matrisin köşegen elemanlarının toplamına o matrisin izi denir. $izA = TraceA = TrA = \sum_j a_{jj}$

14)Bir matrisin rankı: $A_{m \times n}$ matrisinde $m > n$ olmak üzere, n.mertebeden tüm alt kare matrislerinin determinantlarından her hangi biri sıfırdan farklı ise bu matrisin rankı n dir. Eğer tüm n mertebeden matrislerin determinatları sıfır ise, bir alt kare, yani (n-1).mertebeden matrislerin determinantlarına bakılır ve eğer biri sıfırdan farklı ise o zaman matrisin rankı (n-1) dir. Eğer (n-1).mertebenin de sıfır ise (n-2),...gibi devam edilir. Rank lineer bağımsız satır veya sütunların maksimum sayısına eşit olur.

Matrisin rankı **satır indirgeme** ile bulunabilir. Bu durumda şu basamaklar izlenir: 1) Eşelon Formuna Getirme: Temel satır işlemleri (satırların yerini değiştirme, bir satırı sayı ile çarpma veya bir satırın katını başka bir satıra ekleme) kullanarak matris üst üçgen (eşelon) formuna dönüştürülür. 2)Sıfırdan Farklı Satırları Sayma: İndirgenmiş matristeki sıfırdan tamamen farklı olan satırların sayısı (pivot sayısı), o matrisin rankını verir.

$$\text{Örnek: } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \text{ matrisinin rankı 2 dir. Çünkü tüm } (3 \times 3) \text{ alt kare matrislerinin determinanı sıfır iken, } (2 \times 2) \text{ alt}$$

kare matrislerinin determinanı sıfırdan farklı olur. Bu sonuç matrisin sadece iki lineer bağımsız sütuna sahip olmasıyla da bulunur. Çünkü matrisin 3.ve 4.sütunları, 1.ve 2.sütunlar cinsinden yazılabilir;

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 21 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 42 \\ -21 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 2 \\ 54 \\ -15 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 21 \end{bmatrix} + \frac{29}{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 42 \\ -21 \end{bmatrix} \text{ dolayısıyla rank 2 dir.}$$

Matris ve Determinantlarla İlgili Bazı Teoremler:

1) $(A^T)^T=A$, 2) $(A.B)^T=A^T.B^T$, 3) $(A+B)^T=A^T+B^T$, 4) $(A^*)^*=A$, 5) $(A+B)^*=A^*+B^*$, 6) $(A.B)^*=B^*.A^*$, 7) $(A^+)^+=A$, 8) $(A.B)^+=B^+.A^+$, 9) $(A+B)^+=A^++B^+$, 10) $(A^{-1})^{-1}=A$, 11) $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$, 12) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$, 13) $iz(A.B)=iz(B.A)$, 14) $iz(A+B)=izA+izB$, 15) $izA^T=izA$, 16) $A^T=A^{-1}$, $\rightarrow B^T=B^{-1}$, $\rightarrow B^T.A^T=B^{-1}.A^{-1}$, 17) $(A^{-1}).(A^{-1})^T=I$, 18) $\det(A.B)=\det A.\det B$, 19)Köşegen bir matrisin determinanı köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

Lineer Denklem Sistemleri:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m$$

denklem sistemine lineer denklem sistemi denir. Bu sistemde tüm b katsayıları sıfır ise homojen türdeş, en az bir tanesi sıfırdan farklı ise homojen değildir. Bu denklem sistemi matris notasyonu ile $A.x=B$ şeklinde yazılabilir.

Homojen Olmayan Denklem Sistemi:

1)Verilen denklem sayısının bilinmeyen sayısına eşit olduğu durum:

$\det A \neq 0$ ise $A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot B \rightarrow I \cdot x = A^{-1} \cdot B \rightarrow x = A^{-1} \cdot B$ dir. Eğer A matrisinin tersi yoksa sistemin sonsuz çözümü vardır.

Örnek: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$

$$x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 5$$

$-x_1 + x_2 + x_3 = -3$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$. Böyle sistemler Cramer yöntemi ile çözülebilir. Buna göre;

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 11 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{46} = \frac{92}{46} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{46} = \frac{0}{46} = 0, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{46} = \frac{-46}{46} = -1$$

2)Verilen denklem sayısının bilinmeyenden fazla olduğu durum:

Katsayılar matrisinin rangı n ise, en büyük alt kare matris n.mertebeden ise bu denklemin birbirinden bağımsız n tane çözümü vardır. Bu çözümler determinantı sıfırdan farklı olan kare matris seçilerek bulunur. Eğer katsayılar matrisinin rangı bilinmeyen sayısından küçükse sistemin sonsuz çözümü vardır.

3)Bilinmeyen sayısının denklem sayısından fazla olduğu durum:

Bu sistemin bir birinden bağımsız çözümü yoktur, sonsuz çözümü vardır.

Homojen denklem sistemi:

1)Verilen denklem sayısının bilinmeyen sayısına eşit olduğu durum:

$A \cdot x = 0 \rightarrow \det A \neq 0$ ise aşıkâr ya da sıfır çözüm denilen tek bir çözüm vardır; $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$

2)Denklem sayısının bilinmeyen sayısından fazla olduğu durum:

Bilinmeyen sayısı kadar denklem seçilir. Katsayılar matrisinin rangı n ise 1'deki gibi çözüm bulunur.

3)Bilinmeyen sayısının denklem sayısından fazla olduğu durum:

Bu durumda sistemin sonsuz çözümü vardır.

BİR MATRİSİN ÖZDEĞER VE ÖZ VEKTÖRLERİ:

Genellikle her lineer işlemci için bir sayı ve karşı gelen fonksiyonlar takımı tanımlanabilir. $Au_i = \lambda_i u_i$. Burada u_i ve λ_i ; A lineer işlemcisinin sırasıyla **öz fonksiyon (öz vektör)** ve **öz değer**leridir. Özdeğer denkleminin matris notasyonu ile gösterimi $A \cdot X = \lambda \cdot X$ şeklindedir.

$$(A - \lambda I)X = 0 \rightarrow \det|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Bu denkleme A matrisinin **karakteristik denklemi** denir. $(A - \lambda_i I)X_i = 0$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$). Burada λ_i özvektörlerine karşı gelen X_i öz vektörleri bu denklemin çözümüyle bulunur. Elde edilen λ_i lerin hepsi birbirinden farklı ise durumun **katmerli** veya **dejenere olmadığı**, diğer durumlarda katmerli veya dejenere olduğu söylenir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

$$\text{Çözüm: } (A - \lambda I)X = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\det|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=3$ olur. Her λ_i özdeğerine karşılık gelen X_i özvektörleri sırasıyla; λ_1 için

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0, \lambda_2 \text{ için } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0, \lambda_3 \text{ için } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ dır.}$$

λ_1 için $X_1+x_2+x_3=0, 2x_1+2x_2+4x_3=0, -x_1-x_2-3x_3=0 \rightarrow$ taraf tarafa toplamından $2x_1+2x_2+2x_3=0$ elde edilir.

λ_2 için $3X_1+x_2+x_3=0, 2x_1+4x_2+4x_3=0, -x_1-x_2-x_3=0 \rightarrow$ taraf tarafa toplamından $4x_1+4x_2+4x_3=0$ elde edilir.

λ_3 için $-X_1+x_2+x_3=0, 2x_1+4x_3=0, -x_1-x_2-x_3=0 \rightarrow$ taraf tarafa toplamından $4x_3=0$ elde edilir. Buradan $x_3=0, x_1=-x_2$ olur.

$$X_1 \text{ öz vektörü } \rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} m \\ -m \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ normalize edilirse } X_1^* X_1 = [m \quad -m \quad 0] \begin{bmatrix} m \\ -m \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$X_2 \text{ öz vektörü } \rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -m \\ m \end{bmatrix}, \text{ normalize edilirse } X_2^* X_2 = [0 \quad -m \quad m] \begin{bmatrix} 0 \\ -m \\ m \end{bmatrix} = 1 \rightarrow X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$X_3 \text{ öz vektörü } \rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} -2m \\ -3m \\ m \end{bmatrix}, \text{ normalize edilirse } X_3^* X_3 = [-2m \quad -3m \quad m] \begin{bmatrix} -2m \\ -3m \\ m \end{bmatrix} = 1 \rightarrow X_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değer ve öz vektörlerini bulunuz.

Çözüm: $(A - \lambda I)X = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_1=5, \lambda_2=\lambda_3=1$ (iki kat

katmerli). Katmerli olmayan λ_1 öz değeri için X_1 öz vektörünü bulalım. $(A-5I)X_1=0 \rightarrow -3x_1+2x_2+x_3=0, x_1-2x_2+x_3=0, x_1+2x_2-3x_3=0$

denklem sisteminde $\det K=0$ olup sonsuz çözüm vardır. $x_3=1$ seçilirse $x_1=x_2=1$ olur. Bu durumda $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur. Katmerli öz değer

için lineer bağımsız öz vektörlerin sayısı $N=n-\text{Rank}(A-\lambda_1 I)=n-\text{Rank}(A-I)=3-1=2$ dir. Bu sonuç katmerli 1 özdeğerine karşı gelen her iki öz vektörün de (X_2, X_3) lineer bağımsız olduğunu gösterir.

$$(A - \lambda_2 I)X_2 = (A - \lambda_3 I)X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ denkleminde bulunur. } y_1+2y_2+y_3=0. \text{ Burada katsayılar matrisi}$$

indirgendğinde alt iki satırı sıfır, dolayısıyla rankı 1 olur. Bu durumda üçüncü bilinmeyen $y_2=s, y_3=t$ dersek; $y_1=-2s-t$ olur. Bu

$$\text{durumda } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

$$\text{Böylece } X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

“Gram-Schmidt dikleştirme yöntemi”:

X_1, X_2, X_3 öz vektörleri λ öz değerlerine karşılık gelen lineer bağımsız ancak bir birine dik olmayan üç öz vektör olsun. Bunların; $Y_1=X_1, Y_2=X_2+\alpha Y_1, Y_3=X_3+\beta Y_1+\gamma Y_2$ şeklinde tanımlanan lineer bileşimleri de yine öz vektör olacaktır. Bu α, β, γ sabitlerini öyle tanımlayalım ki yeni tanımlanan bu öz vektörler bir birlerine dik olsunlar. Bu durumda; $Y_1 \cdot Y_2=0=Y_1 \cdot X_2+\alpha Y_1 \cdot Y_1 \rightarrow \alpha=-Y_1 X_2/Y_1 Y_1,$
 $Y_3 Y_1=0=X_3 Y_1+\beta Y_1 Y_2+\gamma Y_2 Y_1 \rightarrow \beta=-X_3 Y_1/Y_1 Y_1, Y_3 Y_2=0=X_3 Y_2+\beta Y_1 Y_2+\gamma Y_2 Y_2 \rightarrow \gamma=-X_3 Y_2/Y_2 Y_2$ elde edilir.

MATRİSLERİN KÖŞEĞENLEŞTİRİLMESİ:

Köşegen matris aynı sayılı satır ve sütun elemanları sıfırdan farklı, diğer elemanları sıfır olan kare matristir. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$

Köşegen matrisin n. kuvveti köşegen elemanlarının kuvveti n olan matristir. Bir kare matrisi köşegenleştirmenin çeşitli yolları vardır. Bir A matrisini köşegenleştiren bir Q matrisi tanımlanırsa $\Lambda=Q^T \cdot A \cdot Q$ olur. Burada Λ, A' ’nın köşegen matrisidir. Matrislerin köşegenleştirilmesi ile koordinat dönüşümleri arasında bir ilişki belirlenebilir. Örneğin x, y eksenleri z eksenine etrafında θ açısı kadar döndürülürse, uzaydaki bir (x_1, x_2, x_3) noktasının koordinatları (x'_1, x'_2, x'_3) olur. Bu koordinatların matris gösterimi ve

$$\text{dönüşümü; } X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow X' = R \cdot X \text{ dir.}$$

Buradaki ortogonal R matrisine **dönme matrisi** denir. $R'=Q.R.Q^{-1}$ şeklinde R matrisini köşegenleştiren bir dönüşüm (esas eksen dönüşümü) uygulanabilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm: $\det(A-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$\lambda_1=5$ için elde edilen denklem sisteminden $x_3=1$ seçerek x_1 ve x_2 değerlerini bulup X_1 öz vektörünü belirleriz; $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Denklem sisteminin matrisinden rank 2 olarak bulunur. $\lambda_3=1$ için yeni denklem sistemi elde edilir ve burada $y_1+2y_2+y_3=0 \rightarrow y_2=s$ ve $y_3=t \rightarrow y_1=-2s-t \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, buradan öz vektörler $X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur.

Q matrisi ve tersi; $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ olur.

Köşegen matris $\Lambda=Q^{-1}.A.Q \rightarrow \Lambda = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

ALİŞTIRMALAR:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

a) $3A-2B=C$ ise C matrisini bulunuz.

b) $A+B+D=I$ ise D matrisi nedir?

c) $A^2-B^2=E$ ise E matrisi nedir?

d) $A.B \neq B.A$ olduğunu gösteriniz.

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A^T matrisini bulunuz. Cevap: $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) A^4 matrisini bulunuz. Cevap: $A^4 = \begin{bmatrix} -49 & 294 \\ -147 & 98 \end{bmatrix}$

c) A^{-1} matrisini bulunuz. Cevap: $A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) A matrisinin simetrik olup olmadığını gösteriniz. Cevap: $A^T \neq A$ olduğundan simetrik değildir.

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

a) $A^T+2B=C$ ise C matrisi nedir? Cevap: $D = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A.B=D$ ise D matrisi nedir? Cevap: $D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$

4) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) $\det A$ 'yı hesaplayınız. Cevap: -25

b) A^c 'yi bulunuz. Cevap: $A^c = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & -11 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

c) A^{-1} matrisini bulunuz. Cevap: $A^{-1} = -\frac{1}{25} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -11 & 2 \\ 9 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

d) $\text{iz} A$ 'yı bulunuz. Cevap: 0

5) $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ matrisi ortogonal (dik) matris ve $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğuna göre; y, z ve t nedir? Cevap: 4 farklı durum söz konusudur. Bir durum $(y,z,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, başka durum $(y,z,t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \dots$

6) $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A matrisi simetrik veya antisimetrik midir? Gösteriniz. Cevap: $A^T \neq A$ olduğundan simetrik değil, $A^T = -A$ olduğundan anti-simetriktir.

b) Hermityen veya antihermityen midir? Gösteriniz. Cevap: Hermityendir.

c) Birimsel matris midir? Cevap: $A^* \cdot A = I$ koşulunu sağladığından birimsel (üniter) dir.

7) $A(x) = \begin{bmatrix} x^2 - x & 3x \\ 4x - 1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) $\frac{dA(x)}{dx}$, $A'(2)$ ve $\det A'(2)$ nedir? Hesaplayınız. Cevap: $A'(2) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\det[A'(2)] = -12$

b) $\int_0^1 A(x) \cdot dx$ nedir? Hesaplayınız. Cevap: $\begin{bmatrix} -1/6 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

8) $A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ determinantını açınız. Cevap: -63

9) $2x - y + 3z = 1$, $3x + 2y - z = 0$, $x - 3y - 2z = 2$ denklem sistemini determinant kullanarak çözünüz. Cevap: $x = 17/52$, $y = -27/52$, $z = -3/52$

10) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ matrisini hesaplayınız.

11) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) Satır eşelon forma getiriniz. Cevap: $S. Eşelon A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

b) Rankını bulunuz. Cevap: Eşelon formda tüm elemanları sıfır olmayan satırların sayısıdır; 3.

12) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değeri ve öz vektörlerini bulunuz. Cevap: $\lambda_1=5, \lambda_2=2, X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

13) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değeri ve öz vektörlerini bulunuz. Cevap: $\lambda_1=\lambda_2=3, \lambda_3=-3, X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini köşegen hale getiriniz. Cevap: $A_k = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

BÖLÜM-2

ÖZEL DENKLEMLER VE ÖZEL FONKSİYONLAR

Matematiksel fiziğin pek çok alanında; Laplace, Poisson, Helmholtz, klasik dalga ve Schrödinger gibi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin farklı koordinat sistemlerinde çözümleri genellikle özel fonksiyonlar yardımıyla yapılır.

Örneğin Schrödinger denkleminin küresel koordinatlarda çözümünde yarıçapa bağlı kısım (Bessel diferansiyel denklemini) Bessel fonksiyonları, açılara bağlı kısım (Legendre diferansiyel denklemini) Legendre polinomları ile, harmonik osilatör çözücü ise Hermit polinomları ile yapılır. Bu fonksiyonlar içerisinde faktöriyeller yer alır. Faktöriyelleri içeren fonksiyonlar özellikle gama ve beta fonksiyonlarıdır.

FAKTÖRİYEL FONKSİYONLAR:

1)Gama fonksiyonu:

$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$ (Re $z > 0$), gama fonksiyonunun Euler formudur.

Yaygın olarak bilinen başka biçimi $\Gamma(1)=1$ sınır koşulu altında ve $\psi(z)$ değişken katsayısı $\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right]$ (Re $z > 0$) olmak üzere $\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \psi(z)\Gamma(z)$ 0 diferansiyel denkleminin çözümüdür. Burada $\gamma=0,577216$ Euler-Macheroni sabitidir.

Gama fonksiyonunun özellikleri:

1) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, ($z=0, -1, -2, \dots$ noktaları hariç).

2) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin(z\pi)$, ($z=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ noktaları hariç).

3) $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)=\pi^{1/2}\Gamma(2z)$, ($z=0, -1/2, -1, -3/2, \dots$ noktaları hariç).

4) $\Gamma(1)=1, \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$, ($n=0, 1, 2, \dots$).

5) $\Gamma(1/2)=\pi^{1/2}$.

6) $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$, ($n=1, 2, 3, \dots$).

7) $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5 \dots (2n-1)} \sqrt{\pi}$, ($n=1, 2, 3, \dots$). Legendre polinomları için; $1.3.5 \dots (2n+1)=(2n+1)!!=(2n+1)!/(2^n \cdot n!)$ ve $2.4.6 \dots (2n)=(2n)!!=2^n \cdot n!$ olur.

Örnek: $\int_0^{\infty} e^{-3x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } 3x^2=u \rightarrow 6x dx=du \rightarrow dx = \frac{du}{6(\frac{u}{3})^{1/2}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} du \rightarrow z-1 = \frac{-1}{2} \rightarrow z = \frac{1}{2} \rightarrow I = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\pi}$$

Örnek: a) $\Gamma(4)=?$, b) $\Gamma(5/2)=?$

$$\text{Çözüm: a) } \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n! \rightarrow \Gamma(3+1)=3!=6, \text{ b) } \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \rightarrow n=2 \rightarrow \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

2)Beta fonksiyonu:

Re $x>0$ ve Re $y>0$ olmak üzere $B(x, y) = B(y, x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du$ ile tanımlanır. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ şeklinde gama fonksiyonuna bağlıdır.

Örnek: $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$ integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } \sin x=u \rightarrow \cos x \cdot dx=du \rightarrow \int_0^1 u^2(1-u^2) du \text{ olur. } u^2=t \rightarrow du=dt/(2 \cdot t^{1/2}) \rightarrow \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t) \cdot dt. \text{ Buradan } x-1=1/2 \rightarrow x=3/2 \text{ ve } y-1=1 \rightarrow y=2 \text{ olur. } B\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2}+2)} = \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})(1)}{(\frac{15}{8}\sqrt{\pi})} = \frac{2}{15}$$

$$\text{Not: } B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x \cdot \cos^{2q-1} x \cdot dx$$

PARÇALI KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER:

Parçalı ya da kısmi türevli diferansiyel denklemler (Laplace, Poisson, Helmholtz, Schrödinger...) değişkenlerine ayırma, integral dönüşümü, nümerik hesaplar gibi yöntemlerle çözülebilir.

1)Laplace denklemi:

Kartezyen koordinatlarda değişkenlerine ayırma:

$\nabla^2 \psi(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z)=X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ alınıp denklemden yerine yazıldığında; $Y \cdot Z \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \cdot Z \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + X \cdot Y \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2$, buradan $X''(x)+k^2 X(x)=0$ ve $m^2=-k^2-l^2$ olmak üzere $Y''(y)+l^2 Y(y)=0$ ve $Z''(z)+m^2 Z(z)=0$ denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin genel çözümü $\psi_{klm}(x, y, z)=X_k(x) \cdot Y_l(y) \cdot Z_m(z)$ şeklinde olur. Bu fonksiyon sınır koşullarıyla birlikte $\psi(x, y, z) = \sum_{klm} C_{klm} \cdot X_k(x) \cdot Y_l(y) \cdot Z_m(z)$ şeklinde yazılabilir.

2)Helmholtz denklemi:

Silindirik koordinatlarda Helmholtz denklemi:

$\nabla^2 \psi(\rho, \phi, z) + k^2 \psi(\rho, \phi, z) = 0$ şeklindedir. Bu denkleme değişkenlere ayırma yöntemini uygulayalım. $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi + k^2 \psi = 0 \rightarrow \psi(\rho, \phi, z) = P(\rho) \cdot \Phi(\phi) \cdot Z(z)$ alınırsa, $\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow Z''-l^2 Z=0$, $\Phi''+m^2 \Phi=0$, $P'' + \left(n^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) P = 0$, burada $n^2=k^2+l^2$ dir. Buradaki ρ 'ya bağlı diferansiyel denkleme **Bessel diferansiyel denklemi** denir. Helmholtz denkleminin genel çözümü $\psi(x, y, z) = \sum_{m,n} C_{mn} P_{mn}(\rho) \Phi_m(\phi) Z_n(z)$ şeklindedir.

3)Schrödinger denklemi:

Küresel koordinatlarda zamana bağlı Schrödinger denklemi:

$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r, \theta, \phi, t) + V(r) \psi(r, \theta, \phi, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, \theta, \phi, t)$ şeklindedir. Bu denklemin çözümü $\psi(r, \theta, \phi, t) = U(r, \theta, \phi) \cdot T(t)$ şeklinde olsun. $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{U} \nabla^2 U + V(r) = i\hbar \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = E \rightarrow$ zamana bağlı kısım $T(t) = e^{-iEt/\hbar}$ olur. Konum ve açılara bağlı kısım $-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right] + V(r) U = EU$ olur. $U=R(r) \cdot Y(\theta, \phi)$ şeklinde değişkenlere ayrılan çözümü olsun. Bunu denklemden yerine yazıp denklem değişkenlere ayırdığında; $\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 [E - V(r)] = \lambda \rightarrow R'' + \frac{2}{r} R' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] R - \frac{\lambda}{r^2} R = 0$ (Radyal Schrödinger denklemi), $-\frac{1}{Y \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = \lambda \rightarrow Y=\Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi)$ şeklinde çözüm ararsak, $\frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = m^2 \rightarrow \Phi''+m^2 \Phi=0$ ve $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0$ (Açılara bağlı kısım- Legendre diferansiyel denklemi).

Schördinger denkleminin genel çözümü $\psi(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{m,\lambda} C_{\lambda,m} R_{\lambda}(r) \theta_{\lambda m}(\theta) \phi_m(\varphi) \cdot e^{-iEt/\hbar}$ şeklindedir.

4) Isı iletim (diffüzyon) denklemi:

$\nabla^2 T(x, y, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} T(x, y, t)$, burada α ısı diffüzyon sabitidir. Bu denklem $T(x, y, t) = X(x)Y(y)\tau(t)$ şeklinde değişkenlerine ayrılarak çözülebilir. $B = \alpha \cdot m^2$ ve $\delta^2 = m^2 - Y^2$ sabitler olmak üzere üç tane denklem elde edilir. $\tau' + \beta \tau(t) = 0$, $X'' + \gamma^2 X(x) = 0$, $Y' + \delta^2 Y(y) = 0$; bu denklemlerin çözümleri sırasıyla $\tau(t) = e^{-\beta t}$, $X(x) = A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x)$, $Y(y) = C \cos(\delta y) + D \sin(\delta y)$ şeklindedir. Buradaki A, B, C, D katsayıları başlangıç ve sınır koşullarından bulunur.

BESSEL FONKSİYONLARI:

Bu fonksiyonlar Bessel tarafından gezegenlerin hareketini incelerken tanımlanmıştır. Yaygın biçimi $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ şeklindedir. Burada x kompleks bir değişken, n ise gerçel veya kompleks olabilen sabittir. Bessel denkleminin çözümü $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^{i+k}$, ($a_0 \neq 0$) şeklinde **genelleştirilmiş kuvvet serisi metoduyla** yapılır. Y(x) fonksiyonu diferansiyel denklemde yerine konulup k ve n'nin çeşitli durumları için y(x) fonksiyonu belirlenir.

I.durum: $k=n$; $a_0 \neq 0$ ve $a_1=0$ iken; $y(x) = J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$ bulunur. Buna n.mertebeden **birinci çeşit** Bessel fonksiyonu denir.

II.durum: $k=n$; $a_0 \neq 0$ ve $a_1=0$ iken; $y(x) = J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$, $n>0$ ve n tamsayı iken $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$ şeklinde lineer bağımlılık vardır. bulunur. Bunun dışında kalan çözüm $N_n(x) = \frac{J(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$ şeklinde olur. Bu da n.mertebeden **ikinci çeşit Bessel** ya da **Neumann** fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu durumda n tamsayı iken Bessel denkleminin en genel çözümü $y(x) = A J_n(x) + B N_n(x)$ şeklinde tanımlanır.

n tek yarım sayı iken; denklemin bir birinden bağımsız iki çözümü olup bunların toplamı $y(x) = C J_n(x) + D J_{-n}(x)$ genel çözümdür.

Bessel fonksiyonlarını: $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}$ ($n=0,1,2,\dots$), $J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x}$ ($n=0,1,2,\dots$) yazabiliriz.

Örneğin $n=0$ için $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ ve $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$, $n=1/2$ için $J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \sin x - \cos x\right)$ ve $J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \cos x + \sin x\right)$ olur.

Üretim fonksiyonları:

Bessel denkleminde $g(x, t) = e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cdot t^n$ fonksiyonu yardımıyla üretim fonksiyonları bulunabilir. Buradaki seride t^n nin katsayıları Bessel fonksiyonlarıdır.

Tekrarlama bağıntıları:

Bessel fonksiyonları ve türevleri arasında, bazı integrallerin hesaplanmasında kolaylık sağlayacak aşağıdaki tekrarlama bağıntıları mevcuttur.

1) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$, **2)** $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$, **3)** $xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) = xJ'_n(x)$, **4)** $nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) = xJ'_n(x)$, **5)** $\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$, **6)** $\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$, **7)** $\left(\frac{d}{dx}\right)^m [x^{\pm n} J_n(x)] = (\pm 1)^m x^{\pm n-m} J_{n\pm m}(x)$

Diklik özelliği:

$J_n(x)$ ve $J_n(y)$ fonksiyonlarının Bessel fonksiyonlarında yerine konularak, $x \rightarrow \alpha r$ ve $y \rightarrow \beta r$ dönüşümleri yapılarak, bu fonksiyonların uç noktalarında sıfıra gittiği kabul edilerek, $[a, b]$ aralığında; $\int_a^b r \cdot J_n(\alpha r) \cdot J_n(\beta r) \cdot dr = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2} r^2 [J_{n\pm 1}(\alpha r)]^2 & \alpha = \beta \end{cases}$ şeklinde diklik bağıntısı elde edilir.

BESSEL FONKSİYONLARININ DİĞER ÇEŞİTLERİ:

1) Hankel Fonksiyonları:

$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x)$, $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x)$. Bunlar n.mertebeden sırasıyla birinci ve ikinci hankel (üçüncü çeşit Bessel) fonksiyonlarıdır.

2) Modified Bessel Fonksiyonları:

Bunlar $x \rightarrow \pm ix$ değişimiyle elde edilen fonksiyonlardır. Bu durumda Bessel denklemi $x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0$ olur. Bu denklemin çözümleri $I_n(x)$ ve $K_n(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Modified Bessel fonksiyonlarıdır. $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$, $K_n(x) = (\pi/2) \cdot i^{n+1} \cdot H_n^{(1)}(x)$.

3) Küresel Bessel Fonksiyonları:

Schrödinger denkleminin küresel simetrik potansiyel için çözümünde bulunan radyal denklem kısmı $R'' + \frac{2}{r} \left[k^2(r) - \frac{\lambda^2}{r^2} \right] R = 0$ şeklindedir. Burada $k^2(r) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)]$ ve $\lambda^2 = n(n+1)$ dir. Bu denklemin çözümüne $R(\rho) = A J_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$, burada $\rho = kr$ şeklindedir. Buradaki $J_n(\rho)$ fonksiyonuna **Küresel Bessel Fonksiyonu** denir. Benzer şekilde küresel Neumann, Hankel ve Modified Bessel fonksiyonları da tanımlanır.

$$n_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} N_{n+\frac{1}{2}}(\rho), h_n^{(1)}(\rho) = J_n(\rho) + i n_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho), h_n^{(2)}(\rho) = J_n(\rho) - i n_n(\rho), i_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} I_{n+\frac{1}{2}}(\rho), k_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} K_{n+\frac{1}{2}}(\rho).$$

Bessel fonksiyonlarının özel durumları:

$$1) x \rightarrow \infty \text{ iken; } J_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right], N_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$2) n \text{ çok büyük iken; } J_n(x) \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e^x}{2n} \right)^n, N_n(x) \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e^x}{2n} \right)^{-n}$$

$$3) x \rightarrow 0 \text{ iken; } J_n(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{e^x}{2} \right)^n, N_n(x) \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \Gamma(n) \left(\frac{2}{x} \right)^n & n > 0 \\ \frac{2}{\pi} \ln x & n = 0 \end{cases}, J_n(x) \rightarrow \frac{x^n}{(2n+1)!!} \text{ (n tamsayı), } n_n(x) \rightarrow -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \text{ (n tamsayı).}$$

LEGENDRE POLİNOMLARI:

Fransız matematikçi A.M Legendre gezegenler arasındaki çekim kuvvetinin incelenmesi üzerine yaptığı çalışmalarda bugün kendi adıyla anılan diferansiyel denklemi ve çözüm fonksiyonlarını tanımladı. Kuantum mekaniğinde Schrödinger dalga denkleminin çözümünde; $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \theta = 0$ denklemiyle karşılaşılır. Bu denkleme $x = \sin \theta$ değişken değişimi yapıldığında $(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[1 - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$ elde edilir. Buna **Assosye Legendre Diferansiyel denklemi** denir.

Denkleme $m=0$ iken **Legendre Diferansiyel denklemi**, çözümlerine de **Legendre Polinomları** denir. bu denklemin yaygın biline formu $\lambda = n(n+1)$ olmak üzere, $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$, $(n=0,1,2,...)$ şeklindedir. Çözümü $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$, $(C_0 \neq 0)$ kuvvet serisiyle aranır.

$y(x) = P_n(x) = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{2^n j! (n-j)! (n-2j)!} (x)^{n-2j}$ şeklinde bir çözüm bulunur. Burada $P_n(x)$ fonksiyonları n .mertebeden **birinci çeşit Legendre polinomları** olarak adlandırılır. $Q_n(x)$ fonksiyonu n .mertebeden **ikinci çeşit Legendre polinomları** olmak üzere, genel çözüm $y(x) = P_n(x) + Q_n(x)$ olur. $P_n(x)$ in kuvvet serisinde n çift $\rightarrow m=n/2$, n tek $\rightarrow m=(n-1)/2$ alınır.

Bazı Legendre polinomları; $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=(3x^2-1)/2$, $P_3(x)=(5x^3-3x)/2$, $P_4(x)=(35x^4-30x^2+3)/8$, ...

Legendre polinomları için üretme fonksiyonları:

$P_n(x)$ polinomları; $g(x, t) = \sqrt{1-2t+t^2}$ şeklindeki bir üretme fonksiyonunun t 'nin kuvvet açılımıyla tanımlanabilir. $g(x, t) = \sqrt{1-2t+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot t^n$ ($|t| < 1$ ve $x \neq 1$) den $P_n(x)$ 'in n çift iken çift, n tek iken tek pariteli bir fonksiyon olduğu görülür. $P_n(x) = (-1)^n \cdot P_n(-x)$ veya $P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x)$.

Bu durumda $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$, $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, $P_{2n+1}(0)=0$ olur. Buradan $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{d}{dx} \right]^n (x^2-1)^n$ **Rodrigues formülü** elde edilir.

Legendre polinomları için tekrarlamaya bağıntıları:

Birinci çeşit Legendre polinomları için;

$$1) (2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

$$2) P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = 2xP'_n(x) + P_n(x)$$

$$3) P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

$$4) P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + xP'_n(x)$$

$$5) P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x)$$

$$6) (1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$

$$7) (1-x^2)P'_n(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$$

Legendre polinomlarının diklik özelliği:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

Assosiye Legendre Polinomları:

Assosiye Legendre diferansiyel denklemi $(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]$ şeklindedir. Bu denklemin çözümü $y(x) = P_n^m(x) = (1-x^2)^{1/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ şeklindedir.

HERMİTE POLİNOMLARI

Fransız matematikçi C.Hermite tarafından tanımlanan diferansiyel denklemin çözümlerine Hermite polinomları denir. Hermite polinomlarıyla kuantum mekaniğinde harmonik osilatörün çözümünde karşılaşılır.

Harmonik osilatörün Hamiltoniyeni bir boyutta $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2$ şeklindedir. Burada $\vec{p} = i\hbar\vec{\nabla}$ işlemcisi dikkate alındığında $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} U(x) + \frac{1}{2}Kx^2 U(x) = EU(x)$ elde edilir. Burada $w = \sqrt{\frac{K}{m}}$ alır, $y = \sqrt{\frac{mw}{\hbar}} x = \alpha x$ ve $E = \frac{2E}{\hbar w}$ değişimleri yapılırsa; $\frac{d^2}{dy^2} U(x) + (E - y^2)U(y) = 0$ elde edilir. Bu denklemi $y \rightarrow \infty$ asimtotik davranışında $\frac{d^2}{dy^2} U_0(y) - y^2 U_0(y) = 0$, bunun çözümü $U_0(y) = e^{-y^2/2}$, genel çözümü de $U(x) = y(x) \cdot e^{x^2/2}$ şeklinde olur. Bu U(x) fonksiyonu osilatörün diferansiyel denkleminde yerine konduğunda $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ elde edilir. Çözümdeki y(x) fonksiyonlarına **Hermite polinomları** denir.

Hermite denklemindeki n sabiti $2n = E - 1$ veya $E = \hbar w \left(n + \frac{1}{2}\right)$ dir. Hermite denklemini çözmek için $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{k+m}$ deneyelim. Bu durumda tekrarlama bağıntısı $a_{m+2} = \frac{2(k+m-n)}{(k+m+2)(k+m+1)} a_m$ bulunur. Buradan m ve n'nin çeşitli durumları için y(x) fonksiyonu belirlenir. Bu durumda Hermite polinomları; $y(x) = H_n(x) = \sum_{j=0}^N (-1)^j \frac{n!(2x)^{n-2j}}{j!(n-2j)!}$ Olur. Buradaki N üst sınır değeri; n çift iken $N=n/2$, n tek iken $N=(n-1)/2$ dir. Harmonik osilatörün dalga fonksiyonları da $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n(n!) \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ olur.

Üretme fonksiyonları:

$$g(x, t) = e^{-t^2 + 2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}, \text{ burada } |t| < \infty \text{ dir.}$$

Tekrarlama bağıntıları:

$$1) H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad n=0,1,2,\dots$$

$$2) H_n'(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad n=1,2,3,\dots$$

$$3) H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) = 0 \quad n=1,2,3,\dots$$

$$4) H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad n=0,1,2,\dots$$

Rodrigues formülü:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Hermite polinomlarının bazı özel değerleri; $H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$, $H_2(x)=4x^2-2$, $H_3(x)=8x^3-12x$, $H_4(x)=16x^4-48x^2+12$, ..., $H_{2n}(0)=(-1)^n(2n)!/n!$, $H_{2n+1}(0)=0$

Diklik özelliği:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot H_n(x) \cdot H_m(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & n = m \end{cases}$$

Örnek: bir boyutta salınım yapan harmonik osilatör için, x konum ve P_x momentum işlemcilerinin beklenen değerini bulunuz.

$$\text{Çözüm: } U_n(x) = N_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), P_x = -i\hbar \frac{d}{dx}, \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U_n^*(x) \cdot x \cdot U_m(x) \cdot dx$$

$$\langle x \rangle = [N_n]^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^*(x) x H_n(x) dx = [N_n]^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) \left[\frac{1}{2} H_{n+1}(x) - n H_{n-1}(x) \right] dx =$$

$$[N_n]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x^2} H_n(x) H_{n+1}(x) dx + [N_n]^2 \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-x^2} H_n(x) H_{n-1}(x) dx = 0 \quad (n \neq n+1 \text{ ve } n \neq n-1 \text{ olduğundan dolayı}).$$

$$\langle P_x \rangle = -i\hbar [N_n]^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n^* \left(\frac{d}{dx} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) dx = -i\hbar [N_n]^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) + e^{-\frac{x^2}{2}} H_n'(x) \right) dx = i\hbar \langle x \rangle$$

$$i\hbar [N_n]^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n'(x) dx = 0 + 0 = 0 \quad (\text{burada } H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x) \text{ ve } n \neq m = n-1 \text{ dolayısıyla integral sıfırdır})$$

LAGUERRE POLİNOMLARI

Fransız matematikçi E.Laguerre tarafından kendi adıyla anılan diferansiyel denklemin çözümleri için ortaya atılmış polinomlardır. Kuantum mekaniğinde hidrojen atomunun $V(r) = -Ze^2/r$ çekici potansiyeli içeren Schrödinger denkleminin radyal kısmının çözümünde kullanılır.

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E + \frac{Ze^2}{r} \right] R - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0, \quad (E < 0). \text{ Bu denklemde } \alpha^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}, \gamma = \frac{2mZe^2}{\alpha r^2}, \rho = \alpha r \text{ değişken değişimi yapılsa;}$$

$$R'' + \frac{2}{\rho} R' - \frac{n(n+1)}{\rho^2} R + \frac{\gamma}{\rho} R - \frac{1}{4} R = 0 \text{ elde edilir. Bu denklemin asimtotik davranışı } R(\rho) = F(\rho) e^{-\rho/2} \text{ şeklinde olduğu görülür.}$$

Buradan $F'' + \left[\frac{2}{\rho} - 1 \right] F' + \left[\frac{\gamma-1}{\rho} - \frac{n(n+1)}{\rho^2} \right] F = 0$, bunun çözümü $F(\rho) = \rho^m L(\rho)$ şeklinde olduğunu varsayalım. $P=0$ 'da $R(\rho)=0$ olması için $m=n$ olmalıdır. Bu durumda $\rho L'' + [2(n+1) - \rho] L' + (\gamma - n - 1) L = 0$ elde edilir.

Laguerre diferansiyel denklemi n bir sabit olmak üzere; $xy'' + [1-x]y' + ny = 0$ şeklinde tanımlanır. Bu denklemin çözümü $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{k+m}$ kuvvet serisinden; $y(x) = L_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n! x^m}{(n-m)!(m!)^2}$ şeklinde olur.

Assosye Laguerre diferansiyel denklemi $L_n(x) \rightarrow L_n^m(x)$ yazılarak bulunur; $xy'' + [m+1-x]y' + (n-m)y = 0$. Asosye Laguerre denkleminin çözümleri $L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$ şeklinde tanımlanır.

Üretme fonksiyonları:

$$g(x, t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x) t^n}{n!} \quad (t < 1) \text{ şeklindedir.}$$

Tekrarlama bağıntıları:

$$1) L_n'(x) - n L_{n-1}'(x) + n L_{n-1}(x) = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$2) L_{n+1}(x) + n^2 L_{n-1}(x) - (2n+1-x) L_n(x) = 0$$

$$3) (n+1) L_{n+1}(x) + n L_{n-1}(x) - (2n+1-x) L_n(x) = 0$$

$$4) x L_n'(x) - n L_n(x) + n L_{n-1}(x) = 0$$

Rodrigues formülü:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \text{ şeklindedir. Bazı Laguerre polinomları; } L_0(x)=1, L_1(x)=-x+1, L_2=1-2x+x^2/2, \dots, L_n(0)=n! \text{ olur.}$$

Diklik özelliği:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot L_n(x) \cdot L_m(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ (n!)^2 & n = m \end{cases}$$

KÜRESEL HARMONİKLER:

Laplace denkleminin küresel koordinatlarda çarpanlarına ayırma yöntemiyle elde edilen; $-\frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{d^2}{d\varphi^2} \right] Y(\theta, \varphi) = \lambda Y(\theta, \varphi)$ denkleminin çözümünü sağlayan $Y(\theta, \varphi)$ fonksiyonlarına, $\lambda=n(n+1)$ iken, **küresel harmonikler** denir ve $Y_{nm}(\theta, \varphi) = N_{nm} P_n^m(\cos\theta) \Phi(\varphi)$ şeklinde tanımlanır. Burada $P_n^m(\cos\theta)$ Assosiyé Legendre polinomu, N_{nm} ise normalizasyon sabiti olup $N_{nm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$ şeklindedir.

Küresel harmoniklerin özellikleri:

$$1) Y_{n,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{n,m}^*(\theta, \varphi)$$

$$2) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

Özel değerler:

$$1) Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, 2) Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, 3) Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta, 4) Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1), 5) Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta \cos\theta, 6) Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2\theta$$

EULER-LAGRANGE DENKLEMLERİ

Varyasyon hesabında ve klasik mekanikte verilen bir eylem fonsiyonelinin durağan noktaları olan çözümlerinin oluşturduğu ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemler sistemidir. $I = \int_A^B F[y(x), y'(x), x] \cdot dx$ de $F[y(x), y'(x), x]$ fonsiyoneli $y(x)$ ve $y'(x)$ 'e nasıl bağlı olmalı ki, I integrali bir ekstremum değere sahip olsun şeklinde ifade edilir. Bu ise $\delta I = 0$ için $y(x)$ fonsiyonunun bulunmasıdır. Bu durumda; $\frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) - \frac{dF}{dy} = 0$ denklemini sağlamalı ki bu denkleme **Euler Lagrange denklemi** denir.

Örnek: Bir düzlemde iki nokta arasındaki en kısa yolu veren eğrinin denklemini bulun.

Çözüm: $ds \rightarrow A, B$ noktalarını birleştiren eğri üzerinde diferansiyel yay elemanı olsun. $I = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ dir. $F(y') = (1+y'^2)^{1/2}$ fonsiyonunun kısmi türevleri $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ ve $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ dir. Bu türevleri Euler-Lagrange denkleminde yerine koyarsak; $\frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} = 0 \rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \rightarrow y' = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = A \rightarrow y = Ax + B$ olur.

Örnek: Yeryüzünden yukarıda $A(x,y)$ noktasından serbest düşmeye başlayan m kütleli bir cisim $B(x_0, y_0)$ noktasına en kısa sürede gelmesi için izlemesi gereken yörünge denklemi ne olmalıdır? (Bernoulli tarafından önerilen Brachistochrone problemi).

Çözüm: Bu süre $t = \int_A^B \frac{ds}{v}$, diğer yandan enerjinin korunumundan $mgy = mv^2/2 \rightarrow v = \sqrt{2gy}$, $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow t = \int_A^B \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow F(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ şeklindedir. $(1 + y'^2)y = 2c = \frac{1}{2gc_1^2}$, burada $y' = \cot\theta$ dönüşümü yapılırsa $\rightarrow y = c(1 - \cos 2\theta) = c(1 - \cos\Phi) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dx} \rightarrow x = c(\Phi - \sin\Phi)$ bulunur. Bunlar $(x$ ve $y)$ sikloidin parametrik denklemleridir.

ÇOK DEĞİŞKENLİ EULER-LAGRANGE DENKLEMLERİ:

$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) = 0$ ($i=1,2,3,\dots$), $I = \int_A^B F[y_i(x), y_i'(x), x] dx$ buradaki F 'nin verilen diferansiyel denklemleri sağlaması gerekir. $I = \int_{x_1}^{x_2} F \left[y'(x), \frac{\partial y}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}, x \right] dx$ integralinde F ; $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0$ diferansiyel denklemini sağlamalıdır. $I = \iiint_v F[u_i(x, y, z), u_{ix}(x, y, z), \dots] dx \cdot dy \cdot dz$ de F fonsiyonu; $\frac{\partial F}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right) = 0$, $\left[u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]$, ($i=1,2,\dots,n$) denklemini sağlar.

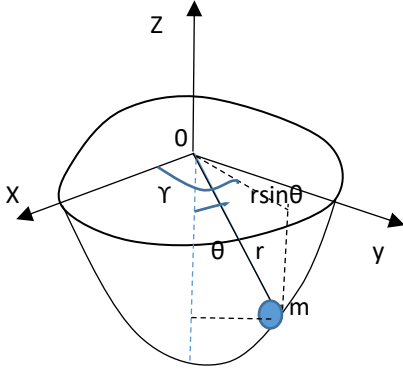
Varyasyonlar hesabının uygulamaları:

Korunumlu bir sistem için Hamilton varyasyon ilkesi ile $\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, q_i', t) dt$ belirlenir. Burada q_i genelleştirilmiş koordinatlar, q_i' türev, t ise zamandır. L fonsiyonuna; $L=T-V$ kinetik ve potansiyel enerjiler arasındaki farkı ifade eden **Lagrange**

fonsiyonu denir. Bu durumda **Lagrange hareket denklemleri** $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ($i=1,2,\dots,n$) şeklindedir. Burada n serbestlik derecesi veya genelleştirilmiş koordinatların sayısıdır.

Örnek: R yarıçaplı bir yarımküre içinde hareket etmekte olan m kütleli bir bilyenin hareket denklemlerini bulunuz. (Bilyeyi noktasal kabul ediniz)

Çözüm:



Şekildeki konumda potansiyel enerji $V = -mgz = -mgr \cos \theta$, kinetik enerji $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ dir. Cismin koordinatları; $x = r \sin \theta \cos \gamma$, $y = r \sin \theta \sin \gamma$, $z = r \cos \theta$ dir. Hız bileşenleri; $\dot{x} = r (\cos \theta \cdot \dot{\theta} \cos \gamma - \sin \theta \cdot \sin \gamma \cdot \dot{\gamma})$, $\dot{y} = r (\cos \theta \cdot \dot{\theta} \sin \gamma + \sin \theta \cdot \cos \gamma \cdot \dot{\gamma})$, $\dot{z} = r (\sin \theta \cdot \dot{\theta})$ şeklindedir. Lagrangian $L = T - V = \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta) + mgr \cos \theta$ olur. $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$; θ için $r \ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\gamma}^2 + g \sin \theta = 0$, γ için $m r^2 \dot{\gamma} \sin^2 \theta = c$ şeklinde hareket denklemleri elde edilir.

Örnek: Kütleli m, yükü e olan bir parçacık $\phi(x)$ skaler ve $\vec{A} = (\vec{x}(t))$ vektör potansiyeli altında elektromanyetik teoriye göre $L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\phi + e\vec{A} \cdot \vec{v}$ şeklinde Lagrange fonksiyonuna sahiptir. Bu parçacığın hareket denklemlerini bulunuz.

Çözüm: Elektromanyetik teoride $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ ve $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ dir. $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ dan; $m \ddot{x}_1 - eE_1 - e(\dot{x}_2 B_3 - \dot{x}_3 B_2) = 0$ ve $m \ddot{x}_1 = eE_1 + e(\vec{v} \times \vec{B})_1$ olur.

ALİŞTIRMALAR:

1) a) $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3} dx$, b) $\int_0^\infty a^{-k^2 x^2} dx$, c) $\int_0^1 \frac{dx}{i(\ln x)^{1/2}}$ integrallerini hesaplayınız (gama (Γ) fonksiyonunun özelliklerini kullanınız). Cevap: a) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$, b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2k\sqrt{\ln a}}$, c) $-\sqrt{\pi}$

2) $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ integralinin doğruluğunu gösteriniz.

3) a) $2 \int_0^{\pi/2} \sin^5 \theta \cdot \cos^3 \theta \cdot d\theta$, b) $\int_0^1 x^4 (1-x)^6 dx$ integrallerini hesaplayınız. Cevap: a) 1/12, b) 1/2310

4) a) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$, b) $\Gamma(3)$, c) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$, d) $\beta(4,2)$, e) $\beta(2,1) + 3\Gamma(2)$ ifadelerinin değerlerini bulunuz. Cevap: a) $\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$, b) 2, c) $\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$, d) 1/20, e) 7/2

5) Birinci çeşit Bessel fonksiyonları $J_n(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(m+n)!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$ şeklindedir. Üretici fonksiyon ise $G(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^\infty J_n(x) t^n$ şeklindedir. Bu ifadeleri kullanarak;

a) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = (2n/x) J_n(x)$, b) $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$, c) $\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$ eşitliklerini gösteriniz.

6) a) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$, b) $x^2 y'' + xy' - 4x^2 y = 0$ diferansiyel denklemlerin çözümlerini Bessel fonksiyonları yardımıyla yazınız.

Cevap: $y = A \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x + B \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$, modifiye Bessel $y = A I_0(2x) + B K_0(2x)$.

7) $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+1/2} \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}$, $J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+1/2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x}$ ($n=0,1,2,\dots$) ve $y(x) = C J_m(x) + D J_{-m}(x)$ veriliyor ($m=n+1/2$).
 $n=2$ için $y(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

8) Legendre polinomları için Rodrigues formülü $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{d}{dx} \right]^n (x^2 - 1)^n$ şeklindedir.

a) $P_2(x)$, b) $P_{2n}(0)$ nedir?

9) a) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$, b) $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 2y = 0$ diferansiyel denklemlerinin çözümlerini Legendre polinomları türünden yazınız.

10) Legendre polinomları için üretme fonksiyonu $g(x,t) = (1-2xt+t^2)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot t^n$ ifadesini kullanarak; a)
 $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$, b) $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$ eşitliklerini gösteriniz.

11) $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx$ integralini (n,m)=(1,2) ve (n,m)=(2,2) durumları için hesaplayınız. Cevap: 0 ve 2/5

12) Assosye Legendre diferansiyel denkleminin Rodrigues formülü $y(x) = P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ olduğuna göre;

a) $L_2^1(x)$, b) $L_1^2(1/2)$ nedir?

13) Bir harmonik osilatörün Hermit diferansiyel denklemi $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ ve bu denklemim çözümü $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n (n!) \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2}$ şeklinde $H_n(x)$ Hermite polinomlarını içerir. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ dır. Buna göre $n=2$ için Hermite diferansiyel denklemi, Hermit polinomu ve $u_n(x)$ ne olur?

14) Hermit polinomlarından $H_2(x)$ ve $H_3(2)$ hesaplayınız.

15) Hermit polinomlarının diklik özelliklerini kullanarak bir boyutta harmonik osilatör için $\langle x^2 \rangle$ beklenen değerini hesaplayınız. {
 $y^2 H_n(y) = (1/4) H_{n+2}(y) + [(2n+1)/2] H_n(y) + n(n-1) H_{n-2}(y)$ eşitliğini kullanabilirsiniz.} Cevap: $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{mw} \left(n + \frac{1}{2} \right)$

16) Üretme fonksiyonlarını kullanarak; $H_n'(x) - 2n H_{n-1}(x) = 0$ $n=1,2,3,\dots$ olduğunu gösteriniz.

17) n bir sabit olmak üzere Laguerre diferansiyel denklemi $xy'' + [1-x]y' + ny = 0$ şeklinde tanımlanıyor. Bu denklemin çözümünden elde edilen üretme fonksiyonları $g(x,t) = e^{-xt/(1-t)} / (1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x) t^n}{n!}$ ve buradan elde edilen Laguerre polinomları $L_n(x) = [e^x / n!] (d^n / dx^n) (x^n e^{-x})$ şeklindedir.

a) $\frac{d}{dx} (y'x) - \frac{d}{dx} (xy) + 3y = 0$ diferansiyel denklemini Laguerre diferansiyel denklemi haline getirerek n 'yi belirleyiniz.

b) a'da verilen diferansiyel denklem için $L_n(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

c)A'da verilen diferansiyel denklem için $L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) + nL_{n-1}(x) = 0$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

18)Assosye lauerre diferansiyel denklemi $xy'' + [m+1-x]y' + (n-m)y = 0$ şeklinde ve bu denklemin çözümleri $L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre; $xy'' + [2-x]y' + y = 0$ denklemi için $L_n^m(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

19)Küresel harmonikler için $Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi}$ dir. Assriye Legendre fonksiyonu olan $P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} (x^2-1)^l$ dir. Bura göre $Y_1^0(\theta, \phi)$ ve $Y_2^1(\theta, \phi)$ yi hesaplayınız.

20)Düşey düzlemde salınım hareketi yapan bir basit sarkacın Lagrangiyenini ve hareket denklemlerini bulunuz.

21)Sürtünmesiz yatay bir çubuğa bir halka bu halkaya da düşey düzlemde bir basit sarkaç bağlanıyor. Sarkaç düşey denge konumundan θ_0 açısı kadar ayrılıp serbest bırakılıyor. Sarkacın hareket denklemlerini yazarak çözünüz.

22) $I(x) = \int_0^{\pi/2} [x(t)^2 - x'(t)^2] dt$, $x(0) = x(\pi/2)$ serbest. Euler-lagrange denklemini ve uç koşullarını kullanarak kritik eğrileri bulunuz. Cevap: $x(t) = C \cdot \sin t$, $C \in \mathbb{R}$.

Mehmet Taşkan

www.fizikselevren.com

Kaynaklar:

- 1)Dennis G.Zill, Warren S.Wright, “ Matematik “ cilt-1, cilt-2 (Calculus), 4.baskıdan çeviri, Çeviri editörü: Prof.Dr. İsmail Naci Cangül, Nobel yayınları, 2020, 2017.
- 2)Prof.Dr. Ahmet A.Karadeniz, “Yüksek matematik” cilt-1 , cilt-2, cilt-2, 8.baskı, Çağlayan Kitabevi, 2000, İstanbul.
- 3)Prof Dr.Coçkun Önem, “Mühendislik ve Fizikte Matematik Metotlar”, 3.baskı, Birsan Yayınevi, 2003, İstanbul.
- 4) Erwin Kreyszig, Edward J. Norminton, “Advanced Engineering Mathematics” 10th edition.
- 5) Sabuncuoğlu, A. (2022). *Lineer cebir* (8. bs.). Nobel Akademik Yayıncılık.
- 6) Anton, H., & Rorres, C. (2005). *Elementary linear algebra: Applications version* (9th ed.). John Wiley & Sons.
- 7) Griffiths, D. J. (2013). *Kuantum mekaniğine giriş* (H. Özbek & S. Durukanoğlu Feyiz, Çev.). Nobel Akademik Yayıncılık.
- 8) Sakurai, J. J., & Napolitano, J. (2017). *Modern quantum mechanics* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- 9) Riley, K. F., Hobson, M. P., & Bence, S. J. (2006). *Mathematical methods for physics and engineering* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- 10) Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). *Mathematical methods for physicists: A comprehensive guide* (7th ed.). Elsevier.