

MÜHENDİSLİKTE VE FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR-2

İçindekiler:

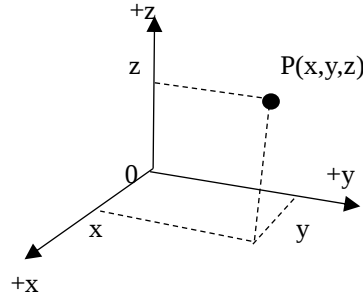
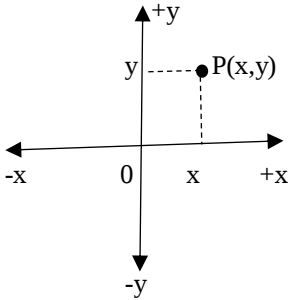
- 1)Bölüm 1: Kartezyen ve kutupsal koordinatlar
- 2)Bölüm 2: Çok değişkenli fonksiyonlar ve kısmi türev
- 3)Bölüm 3: Katlı integraller ve eğrisel yüzeyler
- 4)Bölüm 4: İntegral dönüşümleri (Fourier, Laplace, Rezidü)
- 5)Bölüm 5: Diferansiyel denklemler

BÖLÜM-1

KARTEZYEN VE KUTUPSAL KOORDİNATLAR:

1)KARTEZYEN KOORDİNATLAR:

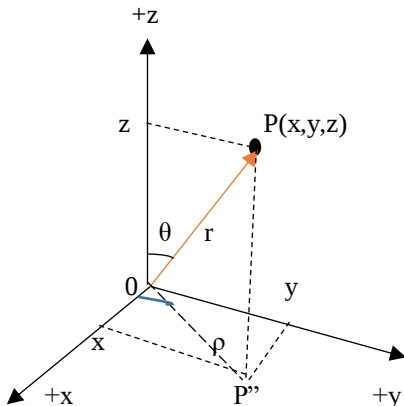
Koordinat sistemleri, n-boyutlu uzayların tanımlanmasında ve incelenmesinde kullanılan analitik ve geometrik kavramlar topluluğudur. Fizik ve mühendisliğin çalışma alanları yaygın olarak, iki ya da üç boyutlu uzayda tanımlanır. Kartezyen ya da dik koordinat sistemi bir birine dik koordinat eksenlerinden oluşur ve eksenlerin kesiştiği nokta orijindir (0,0,0).



Bir P noktasının başlangıç noktasına (orijine) göre konumu iki ve üç boyutlu dik koordinat sisteminde yukarıda şekilde gösterilmiştir. Xyx koordinat sisteminde O'dan P ye çizilen bir vektörü (P'nin O'ya göre konum vektörünü) $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şeklinde gösterebiliriz. Burada $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; sırasıyla x, y, z eksenleri üzerinde birim vektörlerdir.

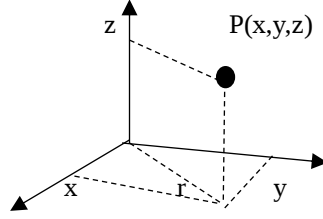
2)KUTUPSAL KOORDİNATLAR:

Uzayın her hangi bir noktasının xyz kartezyen koordinatlarına dönüşümü olan bileşenleri (u_1, u_2, u_3) olan eğrisel koordinat sistemleri tanımlanabilir. Bu P noktası $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = P(u_1, u_2, u_3)$ ile tanımlanır. Bu kutupsal koordinatlar; küresel, silindirik, toroidal, parabolik, eliptik, bipolar... gibi isimler alır.



$P(x,y,z)$ noktası küresel koordinatlarda $P(r,\theta,\varphi)$ bağılı olarak yazılabilir (şekilde görülmekte). Koordinatlar, $\rho=r.\sin\theta$ olmak üzere; $x=\rho.\cos\varphi$, $y=\rho.\sin\varphi$, $z=r.\cos\theta$ şeklinde dönüşür. Burada φ açısı, OP' (yani P nin xy düzlemindeki izdüşümü) ile $+x$ eksenindeki açıdır (azimutal açı).

Üç boyutlu uzayda kutupsal koordinatların doğal bir uzantısı olan silindirik koordinatlar; Kartezyen koordinatların z koordinatını xy düzlemindeki kutupsal koordinatlarla birleştirir. Bu durumda üç boyutlu uzayda alınan bir $P(x,y,z)$ noktasını silindirik koordinatlarda $P(r,\theta,z)$ olarak gösterebiliriz.



Burada r nin $+x$ eksenine yaptığı açı θ dir. Koordinatlar; $x=r.\cos\theta$, $y=r.\sin\theta$, $z=z$ dir. Burada r sabit olduğunda silindirik bir yüzey elde edilir.

Bir doğrunun kutupsal denklemi: $r(A\cos\theta+B\sin\theta)+C=0$ şeklindedir. Bu denklemde $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ yazıldığında $1/r=(-A/C)\cos\theta+(-B/C)\sin\theta$ olur. Bu denklemde $A=0$ ise $1/r=b.\sin\theta$ (kutupsal eksene paralel doğru), $B=0$ ise $1/r=a.\cos\theta$ (kutupsal eksene dik doğru), $C=0$ ise $\tan\theta=-A/B$ (kutuptan geçen doğru) gösterir.

Dairenin kutupsal denklemleri: Dairenin genel denklemi $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ şeklindedir. Burada $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ yazılarak; $r^2+r^2(D\cos\theta+E\sin\theta)+F=0$ şeklinde dairenin kutupsal genel denklemi bulunur. Dairenin merkezi kutupta ise $x^2+y^2=R^2$ den $r=\pm R$, daire kutuptan geçiyorsa $r=-D\cos\theta-E\sin\theta=a.\cos\theta+b.\sin\theta$, daire kutuptan geçiyor ve merkez kutupsal eksen üzerinde ise $(x-R)^2+y^2=R^2$ den $r=2R\cos\theta$, daire kutupta ve kutupsal eksene teğet ise $x^2+(y-R)^2=R^2$ den $r=2R\sin\theta$ olur. Burada R yarıçaptır.

Koniklerin kutupsal denklemleri: Koniklerin Kartezyen koordinatlarda denklemleri $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ şeklindedir. Kutupsal genel denklemleri bu denkleme $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ yazılarak bulunur. Bu durumda odağın doğrultmana uzaklığı d , dış merkezliği (eğrilik oranı) e alınırsa denklem; $r = \frac{ed}{1-ecos\theta}$ olur. Burada $e=1$ ise parabol, $e<1$ ise elips, $e>1$ ise hiperbol belirtir.

Kutupsal denklemi ile verilmiş bir eğrinin her hangi bir noktadaki teğeti ile kutupsal ışıını arasındaki açı: $\tan\varphi=r/r'$, teğetin eğim açısı için $\tan\alpha = \tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta\tan\varphi}$ yazılabilir.

Örnek: $r=a.\sin2\theta$ ve $r=a.\cos2\theta$ eğrilerinin kesişme açılarını bulunuz.

Çözüm: $a.\sin2\theta=a.\cos2\theta \rightarrow \tan2\theta=1$ olur. Bu denklem kesişme noktalarının kutupsal açılarını verir. Buradan $2\theta=\pi/4 \rightarrow \theta=\pi/8$ olur. $\tan\varphi_2=r/r'=(a.\sin2\theta/2a\cos2\theta)=(1/2)\tan2\theta=1/2$, $\tan\varphi_1=r/r'=(a.\cos2\theta/-2a\sin2\theta)=(-1/2)\cot2\theta=-1/2$. Buradan $\tan\alpha = \frac{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}{1+(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}$ bulunur.

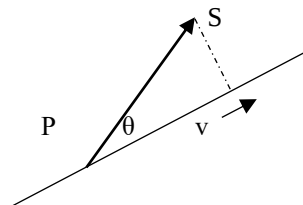
3)DÜZLEM VE KUADRATİK YÜZEYLER:

Uzayda doğrular ve düzlemler:

Bir doğrunun vektörel denklemi: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 'dan geçen ve $\vec{v}$ ne paralel olan L doğrusunun vektörel denklemi $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t.\vec{v}$ dir. Burada $\vec{r}$, L üzerindeki $P(x,y,z)$ noktasının konum vektörü, $\vec{r}_0$ ise $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının konum vektörüdür. t ise $-\infty<t<\infty$ aralığında skaler parametredir.

Bir doğrunun parametrik denklemleri: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 'dan geçen ve $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ 'ye paralel olan doğrunun standart parametrizasyonu $x=x_0+v_1t$, $y=y_0+v_2t$, $z=z_0+v_3t$, $-\infty<t<\infty$ şeklindedir.

Uzayda bir S noktasından, P 'den geçen ve $\vec{v}$ 'ye paralel olan doğruya uzaklık; $d = \frac{|\vec{PS} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ şeklindedir.



Düzlem denklemi: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 'den geçen ve $\vec{n} = A.\vec{i} + B.\vec{j} + C.\vec{k}$ 'ye normal olan düzlemin; 1)Vektörel denklemi $\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$, 2)Bileşen denklemi $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, 3)sadeleştirilmiş bileşen denklemi $D=Ax_0+By_0+Cz_0$ olmak üzere $Ax+By+Cz=D$ şeklindedir.

Bir noktadan bir düzleme uzaklık: P noktası normali $\vec{n} = A.\vec{i} + B.\vec{j} + C.\vec{k}$ olan düzlem üzerinde ise her hangi bir S noktasından düzleme olan uzaklık $d = \left| \vec{PS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$ şeklindedir. Kesişen düzlemler arasındaki açı düzlemlerin normal vektörleri arasındaki dar açıdır; $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right)$.

Kuadratik yüzeyler: $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Jz+K=0$ kuadratik yüzeylerin genel denklemidir. Bu denklem öteleme ve döndürme ile basitleştirilebilir.

Örnek: 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ koordinat eksenlerini $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ 'de kesen elipsoid.

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ $x=0$ ve $y=0$ düzlemlerine göre simetrik olan eliptik paraboloid.

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ üç koordinat eksenine göre de simetrik olan eliptik koni.

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ üç koordinat eksenine göre de simetrik olan tek katmanlı hiperboloid.

5) $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperboloidi.

4) UZAYDA EĞRİLER:

Bir orijinden P noktasına t sürede giden bir parçacığın konum vektörü $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ şeklindedir. Bu bir vektör fonksiyondur. Bir helis için $\vec{r}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$ dir. Burada $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ dir. Vektör fonksiyonun türevi $\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{i} + \frac{dg}{dt}\vec{j} + \frac{dh}{dt}\vec{k} = \vec{v}(t)$ şeklindedir (hız). İkinci türev $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$ ivmedir. İdeal mermi hareketi denklemi $\vec{r}(t) = (v_0 \cos \theta \cdot t)\vec{i} + \left((v_0 \sin \theta \cdot t) - \frac{1}{2}gt^2 \right)\vec{j}$, yay uzunluğu $L = \int_a^b |\vec{v}(t)| \cdot dt$ dir.

Düzgün bir $\vec{r}(t)$ eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ dir. Bu durumda eğrilik fonksiyonu $K = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|$ olur. Eğrilik $K = \frac{1}{|\vec{v}|} \left| \frac{d\vec{T}}{dt} \right|$ olarak da hesaplanabilir. Bir doğrunun eğriliği sıfırdır. Düzlemsel bir eğrinin asal birim normal vektörü $\vec{N} = \frac{1}{K} \frac{d\vec{T}}{ds}$ dir. Eğrilik çemberinde eğrilik yarıçapı $\rho=1/K$ dir. Örneğin $y=x^2$ parabolünün orijindeki eğrilik çemberinin eğrilik yarıçapı $\rho=1/2$, denklemi $x^2+(y-1/2)^2=1/4$ şeklindedir. Düzgün bir eğrinin burulma fonksiyonu $\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N}$ dir. Burada $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ dir.

İvmenin teğet ve normal bileşenleri: $\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$ şeklindedir. Burada T teğet, N ise doğrultuda birim vektörlerdir. $a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$ ve $a_N = K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = K|\vec{v}|^2$.

5) KÜRESEL VE SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA HACİM ELEMANI:

Küresel koordinatlar ile Kartezyen koordinatlar arasındaki bağıntılar ve diferansiyel elemanlar: $x=r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$, $y=r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$, $z=r \cdot \cos \theta$. Burada $\rho=r \cdot \sin \theta$, $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ dir. Diferansiyel eleman (hacim)küresel koordinatlarda $dv=(\rho \cdot d\varphi) \cdot (r \cdot d\theta) \cdot dr=r^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$. Silindirik koordinatlarda $x=r \cdot \cos \varphi$, $y=r \cdot \sin \varphi$ ve $z=z$ olduğundan; $dv=r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$ olur.

Alıştırılmalar:

1)A(2,3,4), B(-1,0,z) noktalarını birleştiren doğrunun uzunluğu $3\sqrt{3}$ olduğuna göre z kaçtır? (Cevap:7)

2) Küresel koordinatlarda P(2, $\pi/6$, $2\pi/3$) noktasını Kartezyen koordinatlarda Q(x,y,z) yazınız. (Cevap: -2, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}$)

3) Kutupsal denklemleri $r=2\sin\theta$ ve $r=\cos\theta$ olan eğrilerin kesişme açılarını bulunuz. (Cevap: $\pi/2$)

4) $(x-2)^2+(y+1)^2-(z-4)^2=0$ 'nin merkez ve tepe noktasını bularak grafiğini çiziniz. (Cevap: $M=T(2,-1,4)$, tepe noktası bu nokta olan z eksenini doğrultusunda çift konidir, kesim noktaları $x=2\pm(15)^{1/2}$, $y=-1\pm2(3)^{1/2}$, $z=4\pm(5)^{1/2}$)

5) $P_0(2,3,-4)$ noktasından geçen $\vec{n} = 4i + 3j - 5k$ 'ye normal olan düzlemin denklemini bulunuz. (Cevap: $4x+3y-5z-37=0$)

6) Bir cisim $y=x^2$ eğrisi üzerinde $A(2,4)$ m noktasından ilk hızsız kaymaya başlıyor. Ortam sürtünmesiz ve yer çekimi ivmesi $g=9,81 \text{ m/s}^2$ dir. Cisim $B(1,1)$ noktasına geldiğinde ivmesinin teğet ve normal bileşenleri kaç m/s^2 olur? (Cevap: $a_N=10,5$, $a_T=8,77$)

BÖLÜM-2

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR VE KISMİ TÜREVLER:

1) İKİ VE ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR:

“D’nin reel sayılardan oluşan $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ n’lilerin bir kümesi olduğu varsayılırsa; D üzerinde reel değerli bir f fonksiyonu, D’deki her elemana bir $W=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ reel sayı atayan bir kuraldır. D kümesi fonksiyonun tanım kümesi, f’nin aldığı w değerlerinin kümesi de fonksiyonun değer kümesidir.” “W bağımlı değişken, x’ler ise bağımsız değişkendir”.

Örnek:

Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer kümesi
$W=(y-x^2)^{1/2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$W=1/xy$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$W=\sin xy$	Tüm düzlem	$[-1, 1]$
$W=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$	Tüm düzlem	$[0, \infty)$
$W=1/(x^2+y^2+z^2)$	$(x,y,z) \neq (0,0,0)$	$(0, \infty)$
$W=xy \ln z$	$z > 0$ yarım uzay	$(-\infty, \infty)$

“Düzlemde bir $f(x,y)$ fonksiyonunu $f(x,y)=c$ gibi bir sabit değer aldığı noktalar kümesine f’nin bir seviye eğrisi denir. tanım aralığındaki bütün $(x,y,(f(x,y)))$ noktalarının kümesine f’nin grafiği denir. f’nin grafiğine ayrıca $z=f(x,y)$ yüzeyi de denir. “

Örneğin: $f(x,y)=100-x^2-y^2=75$ kontur eğrisi $z=75$ düzlemindeki $x^2+y^2=25$ çemberidir.

Örnek: $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ fonksiyonunun seviye yüzeylerini tanımlayınız.

Çözüm: $(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=1$, $(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=2$, ... şeklinde seviye yüzeyleri eş merkezli kürelerdir.

Yüksek boyutlarda limitler ve süreklilik:

$\lim_{(x,y,\dots) \rightarrow (x_0,y_0,\dots)} f(x,y,\dots) = L$, ise limit vardır. Tek değişkenli limitlerde olduğu gibi, çok değişkenli limitlerde de toplam, çarpım, bölüm ve üst kuralları vardır.

Örnek: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: 0/0 belirsizliği vardır. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = 0$

Örnek: $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,0)} \frac{x^2-2yz+z^2}{xy+z} = \frac{1}{2}$

b) Kısmi Türevler:

“Bir fonksiyonun bağımsız değişkenlerden biri dışında hepsini sabit tutup tek değişkene göre türev almadır”. $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$ (önce y’ye sonra x’e göre türev), $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ (önce x’e sonra y’ye göre türev).

Örnek: $f(x,y)=x^2-2xy+y-3$ fonksiyonunun (2,-1) noktasında $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\frac{\partial}{\partial x} f = 2x - 2y \rightarrow \frac{\partial f(2,-1)}{\partial x} = 4 + 2 = 6$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = -2x + 1 \rightarrow \frac{\partial f(2,-1)}{\partial y} = -4 + 1 = -3$$

Örnek: $f(x,y)=x^2 \cos y + y^2 e^{3x}$ fonksiyonunun; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x \cos y + y^2 e^{3x}) = 2 \cos y + 9y^2 e^{3x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-x^2 \sin y + 2y e^{3x}) = -2x \sin y + 6y e^{3x}$$

Örnek: $f(x,y,z)=2-3xy^4z^2+x^2y^3$ fonksiyonunun f_{xyz} türevini bulunuz.

Çözüm: $\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] = ? \rightarrow f_y = -12xy^3z^2 + 3x^2y^2 \rightarrow f_{yx} = -12y^3z^2 + 6xy^2 \rightarrow f_{yxy} = -36y^2z^2 + 12xy \rightarrow f_{xyz} = -72y^2z$

Zincir Kuralı:

$W=f(x,y,\dots,v)$ ‘nin $x,y,\dots,v$ değişkenlerinin (sonlu bir küme) türetilabilir bir fonksiyonu olduğunu ve $x,y,\dots,v$ ‘nin de $p,q,\dots,t$ ‘nin (başka bir sonlu küme) türetilabilir fonksiyonu olduklarını varsayın. Bu durumda w,p ‘den t ‘ye kadar olan değişkenlerin türetilabilir bir fonksiyonudur ve w ‘nın bu değişkenlere göre kısmi türevleri; $\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} + \dots + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p}$ şeklindedir.

Örnek: $w=x^2+y^2$, $x=2r-t$, $y=r+2t$ ise $\frac{\partial w}{\partial r}$ ve $\frac{\partial w}{\partial t}$ türevlerini r ve t türünden bulunuz.

Çözüm: $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = 2x \cdot 2 + 2y \cdot 1 = 4x + 2y = 4(2r - t) + 2(r + 2t) = 10r$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2x \cdot (-1) + 2y \cdot 2 = -2x + 4y = -2(2r - t) + 4(r + 2t) = 10t$$

Doğrultu Türevleri ve Gradyent Vektörler:

$F(x,y)$ ‘nin bir $P_0(x_0,y_0)$ noktasındaki gradyent vektörü (eğim), f ‘nin kısmi türevlerinin P_0 noktasında hesaplanmasıyla elde edilen $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$ vektörüdür. Doğrultu türevi $\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{u,p_0} = (\vec{\nabla} f)_{p_0} \cdot \vec{u}$ şeklinde olur.

Örnek: $f(x,y)=x^2e^y+\sin(xy)$ ‘nin (3,0) noktasında, $(\vec{\nabla} f)_{(3,0)} 3i + 4j$ yönündeki doğrultu türevini bulunuz.

Çözüm: $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j \rightarrow f_x(3,0) = [2xe^y + y \cos(xy)]_{(3,0)} = 6 \rightarrow f_y(3,0) = [x^2e^y + x \cos(xy)]_{(3,0)} = 12 \rightarrow$

$$(\vec{\nabla} f)_{(3,0)} = (f_x i + f_y j)_{(3,0)} = 6i + 12j \text{ . Bu durumda } f \text{ ‘nin } (3,0) \text{ yönündeki doğrultu türevi } (D_u f)_{(3,0)} = (\vec{\nabla} f)_{(3,0)} \cdot \vec{u} = (6i + 12j) \left(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j \right) = \frac{66}{5} \text{ olur.}$$

Bir yüzeye teğet düzlemin ve normalin denklemi:

$Z=f(x,y)$ yüzeyine (x_0, y_0, z_0) da teğet düzlemin denklemi $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$ şeklinde olur. Burada $z_0=f(x_0,y_0)$ dır. Bu denklem üç boyutta $f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)+f_z(z-z_0)=0$, normal denklemi ise $\frac{x-x_0}{f_x} = \frac{y-y_0}{f_y} = \frac{z-z_0}{f_z}$ dır.

Örnek: $z=xsiny-ye^{2x}$ in $(0,0,0)$ daki teğet düzlemini bulunuz.

Çözüm: $f_x(0,0)=(siny-2ye^{2x})_{(0,0)}=0 \rightarrow f_y(0,0)=(xcosy-e^{2x})_{(0,0)}=-1$, teğet düzlem ise $0(x-0)+(-1)(y-0)-(z-0)=0 \rightarrow y+z=0$ olur.

Örnek: $f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$ silindiri ile $g(x,y,z)=x+z-3=0$ düzleminin yüzeyleri bir E elipsinde kesiştiklerine göre, $P_0(1,1,2)$ noktasında E'nin teğetinin parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm: P_0 noktası $\vec{\nabla} f$ ve $\vec{\nabla} g$ 'ye ortogonaldır. Dolayısıyla $\vec{v} = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g$ 'ye paraleldir. V vektörünün bileşenleri ve P_0 koordinatları doğrunun denklemlerini verir. $\vec{\nabla} f(1,1,2) = (2xi + 2yj)_{(1,1,2)} = 2i + 2j$, $\vec{\nabla} g(1,1,2) = (i + k)_{(1,1,2)} = i + k$, $\vec{v} = (2i + 2j) \times (i + k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 2j - 2k$ olur. v vektörü ve $(1,1,2)$ noktasından dolayı $x=1+2t$, $y=1-2t$, $z=2-2t$ bulunur.

Örnek: $f(x,y)=x^2+3xy+y^2+4$ fonksiyonunun $(2,1)$ noktasında lineerizasyonunu bulunuz.

Çözüm: Lineerizasyon; $L(x,y)=f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ fonksiyonudur.

$f_x(2,1)=(2x+3y)_{(2,1)}=7$, $f_y(2,1)=(3x+2y)_{(2,1)}=8$, $f(2,1)=15$. Buradan $L(x,y)=15+7(x-2)+8(y-1)$ bulunur.

İki değişken için Taylor formülü:

$F(a+h, b+k)=f(a,b)+(hf_x+kf_y) \Big|_{(a,b)}+(1/2!)(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}) \Big|_{(a,b)}+\dots+(1/n!)(h^n f_{x^n}+k^n f_{y^n}) \Big|_{(a,b)}+\dots$

Örnek: $f(x,y)=x.e^y$ fonksiyonunun orijin civarında kuadratik ve kübik yaklaşımlarını bulunuz.

Çözüm: $f(0,0)=0$, $f_x \Big|_{(0,0)}=e^y \Big|_{(0,0)}=1$, $f_y \Big|_{(0,0)}=xe^y \Big|_{(0,0)}=0$, $f_{xx} \Big|_{(0,0)}=0$, $f_{yy} \Big|_{(0,0)}=0$, $f_{xy} \Big|_{(0,0)}=e^y \Big|_{(0,0)}=1$, ...

$F(x,y)=0+(x.1+y.0)+(1/2!)(x^2.0+2xy.1+y^2.0)+\dots=x+xy+\dots$

İki değişkenli fonksiyonlarda maksimum ve minimum:

$Z=f(x,y)$ nin (a,b) noktasının civarındaki bütün (x,y) noktaları için; $f(x,y)<f(a,b) \rightarrow f(a,b)$ maksimum, $f(x,y)>f(a,b) \rightarrow f(a,b)$ bir minimum değerdir. $F(a+h, b+k)-f(a,b)<0$ ise $f(a,b)$ maksimum, $f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$ ise $f(a,b)$ minimumdur. Max ve min bulunurken $[f_{xy} \Big|_{(a,b)}]^2 - f_{xx} \Big|_{(a,b)} \cdot f_{yy} \Big|_{(a,b)}$ 'nin >0 , <0 ve $=0$ durumundan Δ 'ya bakılır (işaret aranır).

Örnek: $f(x,y)=8x^3+y^3-12xy+8$ fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f_x=24x-12y=0$ ve $f_y=3y^2-12x=0$ dan $x=0$, $y=0$ ve $x=1$, $y=2$ bulunur.

$F_{xx}=48x$, $f_{xy}=-12$, $f_{yy}=6y$ bulunur. Buradan $\Delta=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy}=144(1-2xy)$ olur. $x=y$ ve $y=0$ için $\Delta=144>0$ (Burada maksimum veya minimum yok). $X=1$ ve $y=2$ için $\Delta=-432<0$ (Bu nokta minimumdur).

2)FOURIER SERİLERİ:

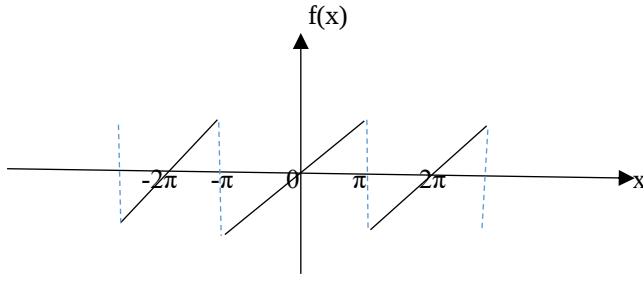
$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ şeklindeki bir seriye trigonometrik seri denir. Buradaki a_0 , a_n , b_n trigonometrik serinin katsayılarıdır. Bu seri yakınsak ise toplamı 2π periyotlu bir $f(x)$ fonksiyonudur, $f(x)=f(x+2\pi)$. Periyodu 2π olan $f(x)$ fonksiyonu $(-\pi, \pi)$ aralığında yakınsak ise; $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ olduğu kabul edilir.

Buradaki katsayılar; $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \cdot dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \cdot dx$ şeklinde bulunur (Fourier katsayıları).

Örnek: $-\pi < x < \pi$ aralığında $f(x)=x$ olan 2π periyotlu $f(x)$ fonsiyonunu fourier serisine açınız.

Çözüm: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot dx = 0$ (Tek fonksiyon $\rightarrow 0$), $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos kx \cdot dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot dx \right) = 0$ (tek.çift = tek $\rightarrow 0$), $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin kx \cdot dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot dx \right) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \begin{cases} k \text{ tek} \rightarrow 2/k \\ k \text{ çift} \rightarrow -2/k \end{cases}$

$f(x) = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} - \dots \right] = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$



Örnek: $-\pi < x \leq 0$ için $f(x)=0$ ve $0 \leq x < \pi$ için $f(x)=x$ olan 2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonunu fourier serisine açınız.

Çözüm: $a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\pi} x \cdot dx \right) = \frac{\pi}{2}$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos kx \cdot dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right)_0^{\pi} = \frac{-2}{k^2} \begin{cases} k \text{ tek} \rightarrow -2/k^2 \\ k \text{ çift} \rightarrow 0 \end{cases}$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin kx \cdot dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-x \cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right)_0^{\pi} = \frac{-1}{k} \cos k\pi \begin{cases} k \text{ tek} \rightarrow 1/k \\ k \text{ çift} \rightarrow -1/k \end{cases}$

$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right)$

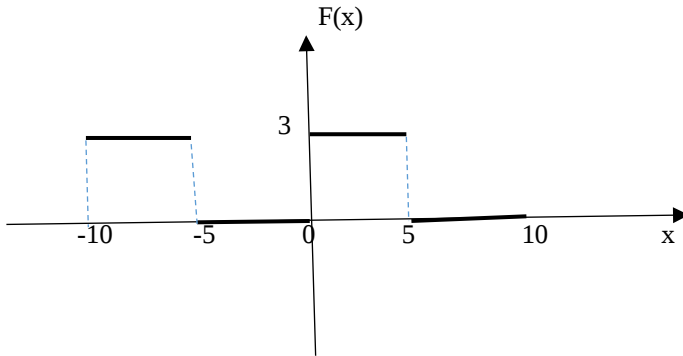
Örnek: $-\pi < x < 0$ için $f(x)=-1$ ve $0 < x < \pi$ için $f(x)=1$ olan 2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız.

Çözüm: $a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \cdot dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot dx \right) = 0$, $a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \cos kx \cdot dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos kx \cdot dx \right] = 0$, $b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \sin kx \cdot dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin kx \cdot dx \right] = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin kx \cdot dx \right] = \frac{2}{\pi k} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} k \text{ çift} \rightarrow 0 \\ k \text{ tek} \rightarrow 4/k\pi \end{cases}$

$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$

Örnek: $-5 < x < 0$ için $f(x)=0$, $0 < x < 5$ için $f(x)=3$ olan 10 periyotlu $f(x)$ fonksiyonunu fourier serisine açınız.

Çözüm: Periyot $\rightarrow 2L=10 \rightarrow L=5$



$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$, $a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx$, $b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx$.

$a_0 = \frac{1}{5} \left[\int_{-5}^0 0 \cdot dx + \int_0^5 3 \cdot dx \right] = 3$, $a_k = \frac{1}{5} \left[\int_{-5}^0 0 \cdot \cos \left(\frac{k\pi x}{5} \right) dx + \int_0^5 3 \cdot \cos \left(\frac{k\pi x}{5} \right) dx \right] = 0$, $b_k = \frac{1}{5} \left[\int_{-5}^0 0 \cdot \sin \left(\frac{k\pi x}{5} \right) dx + \int_0^5 3 \cdot \sin \left(\frac{k\pi x}{5} \right) dx \right] = \frac{3(1 - \cos k\pi)}{k\pi} = \begin{cases} k \text{ tek} \rightarrow 6/k\pi \\ k \text{ çift} \rightarrow 0 \end{cases}$

$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos k\pi)}{k\pi} \sin \left(\frac{k\pi}{5} x \right)$

“Bir aralıkta tanımlı sürekli, periyodik olmayan fonksiyonları da uzatarak Fourier serisine açabiliriz.”

Örnek: $f(x)=x(\pi-x)$ fonksiyonunu $[0, \pi]$ aralığında cosinüs ve sinüs serisine açınız.

Çözüm: 1) cosinüs serisine açmak için fonksiyon $[-\pi, 0]$ aralığına uzatılabilir (Bu durumda 1 periyotluk olur).

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi-x) dx = \frac{\pi^2}{3}$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\pi-x) \cos kx \cdot dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^{\pi} x \cos kx dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx \right] = \frac{-2}{k^2} (\cos k\pi + 1)$

$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 4 \left(\frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right)$

2) Sinüs serisine açmak için fonksiyon $[-\pi, 0]$ aralığına uzatılırsa;

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^\pi x \sin kx dx - \int_0^\pi x^2 \sin kx dx \right] = \frac{4}{\pi k^3} (1 - \cos k\pi) .$$

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \dots \right)$$

Cosinüs serisine açılım fonksiyonundan $x=\pi \rightarrow \pi^2/6=1/1^2+1/2^2+1/3^2+\dots$ serisinin açılımı elde edilir.

Sinüs serisine açılım fonksiyonundan $x=\pi/2 \rightarrow \pi^3/32=1/1^3-1/3^3+1/5^3-\dots$ serisinin açılımı elde edilir.

Pratik kurallar:

1) Tek fonksiyon kuralı: $\int_{-a}^a f(x) . dx = 0$. Örneğin; $\int_{-a}^a x . dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) . dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} x . \cos(nx) . dx = 0$

2) Çift fonksiyon kuralı: $\int_{-a}^a f(x) . dx = 2 \int_0^a f(x) . dx$. Örneğin; $\int_{-\pi}^{\pi} x . \sin(nx) . dx = 2 \int_0^{\pi} x . \sin(nx) . dx$

3) Sinüs ortogonalite integrali: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) . \sin(nx) . dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$

4) Kosinüs ortogonalite integrali: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) . \cos(nx) . dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$

5) Sinüs kosinüs çarpım integrali: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) . \cos(nx) . dx = 0$

6) $\int_{-\pi}^{\pi} x . \sin(nx) . dx = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}$ dir.

Alıştırmalar:

1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1 + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{x^2 + y^2}$ limitini hesaplayınız. (Cevap: 1/2)

2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{4x^2 - 2xy}{y^2 - 1}$ limitini hesaplayınız. (cevap: limit yok)

3) $f(x,y)=x^2+3xy-y^2+1$ fonksiyonunun (1,2) noktasında $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ kısmi türevlerini hesaplayınız. (cevap: 8, -1, 2, 3)

4) $f(x,y,z)=x^2 \sin y + y^2 \cos y - xy^2 z$ fonksiyonunun f_{yxyz} türevini bulunuz. (cevap: -2)

5) $w=x^2+2xy$, $x=r-t$, $y=2r+3t$ ise $\frac{\partial w}{\partial r}$ ve $\frac{\partial w}{\partial t}$ kısmi türevlerini r ve t türünden bulun. (cevap: 10r, -10t)

6) $f(x,y)=3x^2 \cos y + ye^x$ in (2,0) noktasında $\vec{\nabla} f(2,0) = 4i - 3j$ yönündeki doğrultu türevini bulunuz. (Cevap: $(48+6e^2)/5$)

7) $z=xe^{2y}-y \sin 3x$ 'in (0,0,0) noktasındaki teğet düzlemini bulunuz. (Cevap: $x-z=0$)

8) $f(x,y,z)=x^2+y^2-4=0$ silindiri ile $g(x,y,z)=x+z-2$ düzleminin yüzeyleri bir E elipsinde kesiştiklerine göre, $P_0(1,2,1)$ noktasında E'nin teğetinin parametrik denklemlerini bulunuz. (cevap: $x=1+4t$, $y=2-2t$, $z=1-4t$)

9) $f(x,y)=2x^3+4y^3-6xy+8$ fonksiyonunun yerel maksimum ve minimum değerlerini bulunuz. (Cevap: $f_{\min}=7$, $f_{\max}=\infty$)

10) $-\pi < x < \pi$ aralığında $f(x)=x+1$ olan 2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız. (Cevap: $f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$)

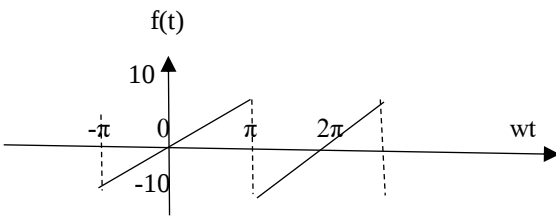
11) $-\pi < x < 0$ aralığında $f(x)=-1$ ve $0 < x < \pi$ aralığında $f(x)=2$ olan 2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız. (Cevap: $f(x) = \frac{1}{2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^{n+1}]}{\pi n} \sin(nx)$)

12) $0 < x < 1$ için $f(x)=1-2x$ olan $f(x)$ fonksiyonunu $(0,1)$ aralığında sinüs serisine açınız. (Cevap: $f(x) = \frac{2}{\pi} \left[\sin 2\pi x + \frac{1}{2} \sin 4\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x + \dots \right]$)

13) $0 < x < 10$ için $f(x)=4x$ olan 10 periyotlu $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız. (Cevap: $f(x) = 20 - \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$)

14) $[-\pi, 0]$ aralığında $f(x)=-\cos x$ ve $[0, \pi]$ aralığında $f(x)=\cos x$ olan $f(x)$ fonksiyonunu Fourier serisine açınız. (Cevap: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{(4k^2-1)} \sin(2kx)$)

15)



Grafiği verilen periyodik fonksiyonunu fourier serisine açınız. (Cevap: $f(t) = \frac{20}{\pi} \left[\sin wt - \frac{1}{2} \sin 2wt + \frac{1}{3} \sin 3wt - \dots \right]$)

BÖLÜM-3

KATLI İNTEGRALLER, EĞRİSEL YÜZEYLERDE TÜREV VE İNTEGRAL:

$f(x,y)$ fonksiyonunun düzlemde bir bölge üzerindeki integrali ve $f(x,y,z)$ fonksiyonunun uzayda bir bölge üzerindeki integrallerine katlı integraller denir.

1)İKİ KATLI İNTEGRALLER:

Özellikleri: 1)Sabitler çarpımı $\iint_R c \cdot f(x,y) \cdot dA = c \iint_R f(x,y) \cdot dA$, 2)Toplam ve fark $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)] \cdot dA = \iint_R f(x,y) \cdot dA \pm \iint_R g(x,y) \cdot dA$, 3)Baskınlık ; a)R üzerinde $f(x,y) \geq 0 \rightarrow \iint_R f(x,y) dA \geq 0$, b)R üzerinde $f(x,y) \geq g(x,y) \rightarrow \iint_R f(x,y) dA \geq \iint_R g(x,y) dA$, 4)R üst üste binmeyen R_1 ve R_2 gibi iki bölgenin bileşimi ise; $\iint_R f(x,y) dA = \iint_{R_1} f(x,y) dA + \iint_{R_2} f(x,y) dA$.

“Fubini teoremi: $f(x,y)$ bir R bölgesi üzerinde sürekli olsun.

1)R, $g_1, g_2 [a,b]$ ’de sürekli olmak üzere, $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ ile tanımlanıyorsa $\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \cdot dx$ olur.

2) R, $h_1, h_2 [c,d]$ ’de sürekli olmak üzere, $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ ile tanımlanıyorsa $\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx \cdot dy$ olur.

İki katlı integralde sınır belirleme:

a)Verilen alan dikdörtgen ise integral sınırları sayıdır. b)Verilen alan dikdörtgen değil ise dıştaki sınırlar sayı içteki sınırlar fonksiyondur. İki sınır da sayı ise integral alma sırası önemli değildir.

Örnek: $\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y \cdot dy \cdot dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y dy \right) x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{60}$

Örnek: Tabanı xy düzleminde x-ekseni, $y=x$ ve $x=1$ doğruları tarafından sınırlı üçgen olan ve tepesi $z=f(x,y)=3-x-y$ düzleminde bulunan prizmanın hacmini bulunuz.

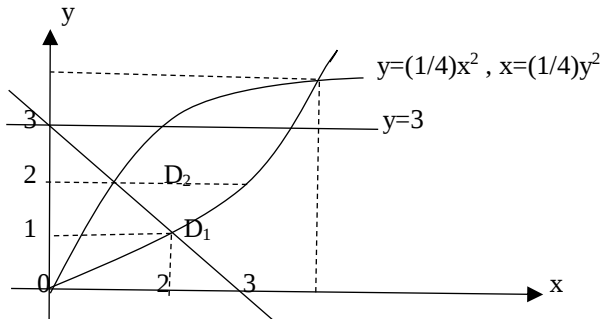
Çözüm: $V = \int_0^1 \int_0^x (3-x-y) dy \cdot dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = 1$

Örnek: $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy \cdot dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int e^{y^2} dy$ integrali hesaplanamadığı için sıra değişimi yapılır. Bu durumda sınırlar değişir. İlk $y=x$, $y=1$ ve $x=0$, $x=1$; son $x=0$, $x=y$ ve $y=0$, $y=1$ olur. Buradan integral; $\int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx \cdot dy = \int_0^1 (ye^{y^2}) dy = \frac{1}{2}(e-1)$ bulunur.

Örnek: $\iint_D (x-y) dx \cdot dy$ integralini $x+y=3$, $x^2=4y$, $y^2=4x$ ve $y=3$ eğrilerinin birinci bölgede sınırladıkları D bölgesinde hesaplayınız.

Çözüm:



$$\iint_{D_1} (x-y) dx dy + \iint_{D_2} (x-y) dx dy = \int_{y=1}^{y=3} \left(\int_{x=3-y}^{x=2\sqrt{y}} (x-y) dx \right) dy + \int_{y=2}^{y=3} \left(\int_{x=y^2/4}^{x=2\sqrt{y}} (x-y) dx \right) dy = \frac{2007}{160} - \frac{36\sqrt{3}}{5}$$

İki katlı integral ile hacim, alan, kütle merkezi ve moment hesaplama:

Örnek: $x^2+y^2=16$ ve $x^2+z^2=16$ silindirlerinin sınırladıkları ortak hacmi hesaplayınız.

Çözüm: $z = \sqrt{16-x^2}$ ve D bölgesi $x^2+y^2=16$ dairedir.

$$V = 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2} dy dx = 8 \int_0^4 (16-x^2) dx = \frac{1024}{3}$$

Örnek: $y=2-x^2$, $y=x$ eğrilerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Çözüm: Eğrilerin kesim noktaları; $2-x^2=x \rightarrow x^2+x-2=0$ dan $x=1$ ve $x=-2$.

$$A = \int_{-2}^1 \left(\int_x^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^1 (2-x^2-x) dx = \frac{27}{6}$$

Örnek: $\rho=3\cos\theta$ dairesinin içinde ve $\rho=1+\cos\theta$ kardoidinin dışındaki alanı hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } A = \iint_D \rho \cdot d\rho \cdot d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \rho \cdot d\rho \right) d\theta = \pi$$

Örnek: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y^2} dy = B \rightarrow B^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx \cdot dy \rightarrow B^2 = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho \cdot d\rho \right) d\theta \rightarrow B^2 = \pi/4 \rightarrow B = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

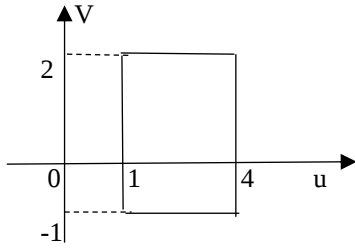
İki katlı integrallerde değişken değiştirme:

$\iint_D f(x,y) dx \cdot dy = \iint_{D'} f[\alpha(u,v), \beta(u,v)] \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du \cdot dv$ şeklinde integral D bölgesinden D' bölgesinde u, v değişkenlerine

dönüşür. Burada $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ Jakobiyendir. $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 1 / \left| \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right|$

Örnek: D bölgesi (1,0), (2,2), (1,3) ve (0,1) noktaları olan bir paralel kenar olduğuna göre bu bölgede $\iint_D (x+y)^4 dx \cdot dy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bu paralel kenarın kenarlarının denklemleri; $x+y=1$, $x+y=4$ ve $2x-y=-1$, $2x-y=2$ dir. Burada $x+y=u$ ve $2x-y=v$ olsun. Buradan $u=1$, $u=4$ ve $v=-1$, $v=2$ olur.



$$J = \frac{1}{D(u,v)/D(x,y)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{3}$$

$$\iint_D (x+y)^4 dx dy = \iint_{D'} u^4 \frac{1}{3} du \cdot dv = \frac{1}{3} \left(\int_1^4 u^4 du \right) \left(\int_{-1}^2 dv \right) = \frac{1023}{5}$$

Yüzey alanı hesabı: $S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$ formülünden hesaplanabilir.

Örnek: $z=x^2+y^2$ paraboloidinin $z=1$ düzleminin altında kalan kısmının alanını bulunuz.

Çözüm: Alanı hesaplanacak bölgenin xoy düzlemindeki izdüşümü $x^2+y^2=1$ dairesidir. Buna göre $z=f(x,y)=x^2+y^2 \rightarrow dz/dx=2x$ ve $dz/dy=2y \rightarrow S = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx \cdot dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$ olur.

İki katlı integrallere ait diğer uygulamalar:

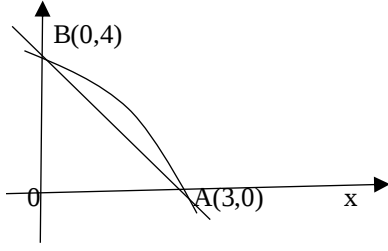
1)Yüzeysel yoğunluğu $f(x,y)$ olan katı bir cismin kütlesi $M = \iint_D f(x,y) dx \cdot dy$

2)Düzlemsel şeklin eylemsizlik momenti; a)Başlangıç noktasına göre $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) f(x,y) dx \cdot dy$, b)ox eksenine göre $I_{ox} = \iint_D (y^2) f(x,y) dx \cdot dy$, c)oy eksenine göre $I_{oy} = \iint_D (x^2) f(x,y) dx \cdot dy$

3)Katı cismin ağırlık merkezi $\bar{x} = \frac{\iint_D x \cdot dx dy}{\iint_D dx dy}$, $\bar{y} = \frac{\iint_D y \cdot dx dy}{\iint_D dx dy}$

Örnek: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ elipsinin A(3,0), B(0,4) noktalarını birleştiren kirişinin meydana getirdiği homojen elips parçasının ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:



$$\frac{y}{4} + \frac{x}{3} = 1 \rightarrow y = 4 \left(1 - \frac{x}{3} \right), \text{ AB yayının denklemleri } y = \frac{4}{3} \sqrt{9 - x^2}, \text{ kesişim bölgesinin alanı } \iint_D dx dy = \frac{1}{4} A_{elips} - A(\widehat{AOB}) \rightarrow$$

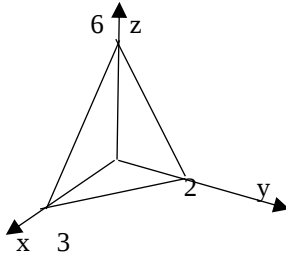
$$\frac{\pi \cdot 3 \cdot 4}{4} - \frac{3 \cdot 4}{2} = 3\pi - 6. \text{ Ağırlık merkezi } \bar{x} = \frac{\iint_D x \cdot dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_0^3 \left(\int_{\frac{4}{3}(3-x)}^{\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}} dy \right) x dx}{3\pi - 6} = \frac{2}{\pi - 2}, \bar{y} = \frac{8}{3\pi - 6}$$

Düzlem, silindir, koni, küre ve paraboloid denklemleri:

1) Düzlem denklemi: $ax+by+cz+d=0$

Örnek: $2x+3y+z-6=0$ çiziniz.

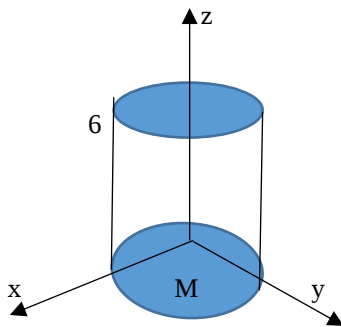
Çözüm:



2) Silindir denklemi: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ denklemi iki boyutta çember, üç boyutta z eksenli boyunca uzanan bir silindir belirtir.

Örnek: üç boyutta $(x-2)^2+(y-1)^2=4, 0 \leq z \leq 6$ silindirin çiziniz.

Çözüm: Merkezi M(2,1), taban yarıçapı $r=2$ ve yüksekliği $h=6$ olan silindir.



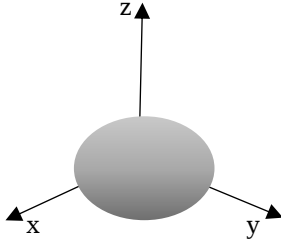
3) Konik denklemi: üç boyutta genel konik yüzeyler $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0$ şeklindedir. $\Delta=B^2-4AC$ değeri konik türünü belirler.

Örnek: $z=(x^2+y^2)^{1/2}$ denklemi +z eksenli bir koni, $z^2=(x^2+y^2)$ denklemi +z ve -z eksenli iki koni belirtir.

4) Küre denklemi: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

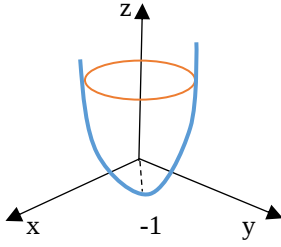
Örnek: $x^2+y^2+z^2=1$ çiziniz.

Çözüm:



5)Paraboloid:

Örnek: $z=x^2+y^2-1$ paraboloidini çiziniz.



6)Hiperboloid: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$

2) ÜÇ KATLI İNTEGRALLER:

Bir S yüzeyiyle sınırlanmış bir V uzay bölgesi ve bu bölgede tanımlı ve sürekli olan, bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu göz önüne alalım. Bu bölgeyi her hangi bir şekilde $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ gibi n bölgeye ayıralım. ΔV_i ler aynı zamanda bu bölgelerin hacimlerini göstersinler. Bu bölgelerin her birinde birer P_i noktası seçelim ve $f(x,y,z)$ fonksiyonunun bu noktalardaki $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ değerlerini hesaplayalım. Sonra bu değerlerin her birini noktaların ait oldukları bölgelerin hacımları ile çarpalım ve bu çarpımların $f(P_1)\Delta V_1 + f(P_2)\Delta V_2 + \dots + f(P_n)\Delta V_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta V_i$ şeklinde toplamını alalım. ΔV_i hacım elemanı sıfıra yaklaşacak şekilde, n'nin sınırsız olarak artması halinde limitini düşünelim. Bu limit, $f(x,y,z)$ fonksiyonunun V bölgesindeki üç katlı integrali olarak adlandırılır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta V_i = \iiint_V f(x,y,z) \cdot dv$ şeklinde gösterilir.

Üç katlı integralde sınırlar:

$$\iiint_V f(x,y,z)dv = \int_a^b \left(\int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} \left(\int_{\alpha_1(x,y)}^{\alpha_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

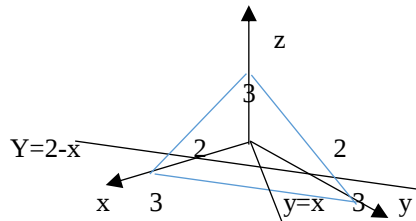
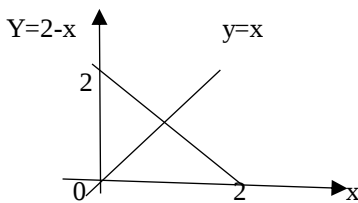
V bölgesinde $f(x,y,z)=1$ ise $V = \iiint_V dv$ bölgenin hacmini verir.

Örnek: $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x \cdot dz \cdot dy \cdot dx$ integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \int_0^1 \int_0^x (x^2 - xy) \cdot dy \cdot dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$$

Örnek: V bölgesi $z=0, y=0, y=x, x+y=2, x+y+z=3$ düzlemlerinin sınırladığı bölge olduğuna göre $\iiint_V x \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:



Bölge z ekseninde projekte edildiğinde taban üçgeni xy düzleminde ve köşeler $(0,0), (2,0), (1,1)$ düzleminde olur. Bu durumda z için alt sınır $z=0$, üst sınır $z=3-(x+y)$ olur. Bu durumda parçalı integral alırız.

$$V = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{3-(x+y)} x \, dz \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \int_0^{3-(x+y)} x \, dz \, dy \, dx = \frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3}{2}$$

Örnek: Bir V bölgesi $x+y+z=2$ düzlemi ve x, y, z eksenleri arasında birinci bölgeyle sınırlı bölgedir (Bu bir düzgün tetrahedron'dur). Bu bölgenin hacmini üç katlı integral ile hesaplayınız.

Çözüm: Bölge $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 2$ dir. z 'ye göre sınırlar $0 \leq z \leq 2-x-y$, xy düzlemindeki taban üçgende $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x$ dir.

$$V = \iiint_V 1 \, dv = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2-x} \int_{z=0}^{z=2-x-y} dz \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^{2-x} (2-x-y) dy \, dx = \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{2} dx = \frac{4}{3}$$

Örnek: $x^2+y^2+z^2=4$ ve $x^2+y^2-2z=0$ yüzeylerinin sınırladığı hacmi hesaplayınız.

Çözüm: Bunu silindirin eksen z doğrultusunda olan $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ diski ve $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ küresinin iç bölgesinin kesişimi olarak görebiliriz. Hacmi küre tarafından verilen z sınırları ile dik kesit alanının iki katı şeklinde yazmak en kolay yoldur.

İç bölge; $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ ve $x^2+y^2+z^2 \leq 4$. Kürenin üst ve alt yarısı (z için sınırlar); $-(4-(x^2+y^2))^{1/2} \leq z \leq (4-(x^2+y^2))^{1/2}$. Dolayısıyla hacim;

$$V = \iint_D \left(2 \int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} dz \right) dy \, dx = 2 \iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)} dy \, dx. \text{ Bu integral polar koordinatlara dönüştürüldüğünde}$$

$$(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, \text{ silindir sınırı } r^2-2r\cos\theta=0 \rightarrow -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2); V = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2} \cdot 2r \, dr \, d\theta = \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9}$$

Üç katlı integralde değişken değiştirme:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] |J| du \, dv \, dw$$

$$\text{Burada } J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \text{ jakobiyendir.}$$

$$1) \text{Silindirik koordinatlarda; } J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$2) \text{Küresel koordinatlarda; } (0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi), J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2 \sin\theta$$

Örnek: V bölgesi $x^2+y^2+z^2=1$ küresi ile $z^2=x^2+y^2$ konisinin sınırladığı bölge olduğuna göre $\iiint_V (x^2 + y^2) dx \, dy \, dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bu integrali küresel koordinatlarda hesaplayalım. $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta; J=r^2\sin\theta$ dir. Koni +z eksenli tarafında ve yanal yüzeyi xy düzlemiyle $\theta=\pi/4$ açı yapmaktadır. Koni tavanının yarıçapı $\sqrt{2}/2$ olur.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \rightarrow V = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^{\pi/4} \sin^3 \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^1 r^4 dr \right) = \frac{\pi(4\sqrt{2}-5)}{15\sqrt{2}}$$

Örnek: V bölgesi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidinin $z=0$ düzleminin üstünde kalan kısmı olduğuna göre $\iiint_V z dx \, dy \, dz$ integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } x=au, y=bv, z=cw \text{ olsun. Birim küre içinde } u^2+v^2+w^2 \leq 1 \text{ ve } w \geq 0 \text{ (üst bölge) dir. } J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \rightarrow$$

$$\iiint_V z \, dV = \iiint_{\text{yarım küre}} (cw)(abc) \, du \, dv \, dw = abc^2 \iiint_{\text{yarım küre}} w \, dV = abc^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r\cos\theta) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \rightarrow abc^2 \pi/4.$$

Örnek: $x^2+y^2+z^2=4$ küresi ile $x^2+y^2=3z$ paraboloidinin sınırladığı cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Paraboloid; $x^2+y^2=3z \rightarrow z=r^2/3$. Küre; $x^2+y^2+z^2=4 \rightarrow z=\pm(4-r^2)^{1/2}$. Kesim halkası; iki yüzeyin kesişiminde $r^2+(r^2/3)^2=4 \rightarrow r^2+r^4/9=4 \rightarrow r=3^{1/2}$ ve kesişim yüksekliği $z=1$ dir. İntegral sınırları; $0 \leq r \leq 3^{1/2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, (r^2/3) \leq z \leq (4-r^2)^{1/2}$ olur.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(r\sqrt{4-r^2} - \frac{r^3}{3} \right) dr = \frac{19\pi}{6}$$

3)VEKTÖR ALANLARINDA TÜREV VE İNTEGRAL:

Diverjans ve Rotasyonel:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) (V_x i + V_y j + V_z k) = \frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial y} V_y + \frac{\partial}{\partial z} V_z$$

$$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \quad \text{ve} \quad \vec{\nabla}(f \vec{u}) = f(\vec{\nabla} \vec{u}) + \vec{u} \vec{\nabla} f$$

$$\text{Vektör alanı } \vec{V} = V_x i + V_y j + V_z k \text{ için } \operatorname{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{i} \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \vec{j} \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{rot}(U+V) = \operatorname{rot} U + \operatorname{rot} V$$

Örnek: $\vec{V} = (z, xy^2, 3y)$ ise; a) $\operatorname{div} \vec{V}$, b) $\operatorname{rot} \vec{V}$ nedir?

$$\text{Çözüm: a) } \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (z, xy^2, 3y) = (0, 2xy, 0)$$

$$\text{b) } \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & xy^2 & 3y \end{vmatrix} = (3, 1, y^2)$$

Laplasyen:

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow \vec{\nabla}^2 U = \operatorname{lap} U$$

$Z=f(x,y)$ fonksiyonu bir D bölgesinde ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip ve $\vec{\nabla}^2 z = 0$ ise z fonksiyonuna D bölgesinde harmonik fonksiyondur denir. benzer şekilde $u=f(x,y,z) \rightarrow \vec{\nabla}^2 u = 0$ ise harmonik fonksiyondur. $\vec{\nabla}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ denklemlerine **Laplace denklemleri** denir.

Elastisite teorisinde $\nabla^2 z = \nabla^2 (\nabla^2 z) = 0 \rightarrow \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0$ denklemini sağlayan z fonksiyonlarına biharmonik fonksiyonlar denir.

Örnek: $z=e^x \sin y$ 'nin harmonik fonksiyon olduğunu gösteriniz.

$$\text{Çözüm: } \vec{\nabla}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ olmalıdır. } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \sin y \text{ ve } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \sin y \text{ dir. Bu durumda } \vec{\nabla}^2 z = 0 \text{ olur.}$$

Laplasyenin kutupsal, silindirik ve küresel koordinatlarda ifadesi:

$$\text{İki değişkenli için kutupsal koordinatlarda laplasyen; } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

$$\text{Silindirik koordinatlarda laplasyen; } \vec{\nabla}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\text{Küresel koordinatlarda laplasyen; } \vec{\nabla}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Örnek: $x=2\sin 3t, y=2\cos 3t, z=8t$ eğrisi boyunca hareket eden bir noktanın her hangi bir t anındaki hız ve ivmesini bulunuz.

$$\text{Çözüm: } \vec{r} = (2\sin 3t, 2\cos 3t, 8t) \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6\cos 3t, -6\sin 3t, 8) \text{ ve } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-18\sin 3t, -18\cos 3t, 0) .$$

Örnek: $\vec{A} = x^2 y z \vec{i} - 2 x z^3 \vec{j} + x z^2 \vec{k}$, $\vec{B} = 2 z \vec{i} + y \vec{j} - x^2 \vec{k}$ olduğuna göre $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\vec{A} \times \vec{B})$ nin (1, 0, -2) deki değerini bulunuz.

$$\text{Çözüm: } \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x^2 y z & 2 x z^3 & x z^2 \\ 2 z & y & -x^2 \end{vmatrix} = i(2 x^3 z^3 - x y z^2) - j(-x^4 y z - 2 x z^3) + k(x^2 y^2 z + 4 x z^4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\vec{A} \times \vec{B}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-x z^2 i + x^4 x j + 2 x^2 y z k) = -z^2 i + 4 x^3 z j + 4 x y z k \rightarrow -4i - 8j$$

Örnek: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

4) EĞRİSEL YÜZEYLERİN İNTEGRALLERİ:

Bir c uzay eğrisi boyunca P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) fonksiyonlarının eğrisel integralleri tanımlanabilir.

$$\int_c [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz]$$

Eğrisel integrallerin özellikleri:

$$1) \int_M^N P. dx + Q. dy = - \int_N^M P. dx + Q. dy \text{ (sınırların değişimi)}$$

$$2) \int_M^N P. dx + Q. dy = \int_M^K P. dx + Q. dy + \int_K^N P. dx + Q. dy \text{ (parçalama)}$$

$\vec{F}$ vektör fonksiyonun integrali c kapalı bir eğri boyunca hesaplanıyorsa; $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ buna $\vec{F}$ nin c boyunca sirkülasyonu denir.

Örnek: c eğrisi düzlemde $O(0,0) \rightarrow A(2,0) \rightarrow B(2,1) \rightarrow O(0,0)$ şeklinde (OAB) üçgeninin çevresi olduğuna göre, verilen yönü dikkate alarak $\int_c y^2 dx + x^2 dy$ eğrisel integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } \int_c y^2 dx + x^2 dy = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} \rightarrow \int_{OA} 0. dx + x^2 \cdot 0 = 0, \int_{AB} y^2 \cdot 0 + 2^2 \cdot dy = \int_0^1 4 \cdot dy = 4, \\ \int_{BO} y^2 \cdot dx + x^2 \cdot dy = \int_2^0 \frac{1}{4} x^2 dx + \frac{1}{2} x^2 dx = -2, \rightarrow \int_c y^2 dx + x^2 dy = 0 + 4 - 2 = 2$$

Örnek: $\int_{(1,0,1)}^{(2,3,2)} x^2 \cdot dx - xz \cdot dy + y^2 dz$ eğrisel integralini, sınırlarındaki iki noktayı birleştiren doğru boyunca hesaplayınız.

Çözüm: (1,0,1) ve (2,3,2) noktalarını birleştiren doğrunun parametrik denklemi; $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{3-0} = \frac{z-1}{2-1} = t \rightarrow x=t+1, y=3t, z=t+1$ ve $dx=dt, dy=3dt, dz=dt$ olur. (1,0,1) parametrik denklemlerde yerlerine konduğunda $t=0$ (integral alt sınırı), (2,3,2) parametrik denklemlerde yerlerine konduğunda $t=1$ (integral üst sınırı) elde edilir.

$$\int_{(1,0,1)}^{(2,3,2)} x^2 \cdot dx - xz \cdot dy + y^2 dz = \int_0^1 (t+1)^2 dt - (t+1)^2 3dt + 9t^2 dt = \int_0^1 (7t^2 - 4t - 2) dt = \frac{-5}{3}$$

“Kapalı bir D bölgesini alttan sınırlayan $y=y_1(x)$ ile üstten sınırlayan $y=y_2(x)$, $y_1(x) \leq y_2(x)$, bu eğrileri ox ekseninde izdüşümleri [a,b] doğru parçası ise, bu durumda bu bölgenin alanı $A = \int_a^b y_2(x) \cdot dx - \int_a^b y_1(x) \cdot dx$ dir.

Örnek: $x=a \cdot \cos t, y=b \cdot \sin t$ parametrik denklemleriyle verilmiş elipsin alanını bulunuz.

$$\text{Çözüm: } A = \frac{1}{2} \int_c x \cdot dy - y \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cdot \cos t \cdot b \cdot \cos t - b \cdot \sin t \cdot (-a \cdot \sin t)] dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

GREEN FORMÜLÜ (Riemann Formülü):

P(x,y) ve Q(x,y) gibi D bölgesinde kısmi türevleri sürekli olan iki fonksiyon için;

$\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx \cdot dy$ ifadesine Green ya da Riemann formülü denir. Green formülünde özel olarak $Q(x,y)=x, P(x,y)=-y$ alınır ve D bölgesinin alanı A ile gösterilirse; $A = \frac{1}{2} \oint_c xdy - ydx$ bulunur.

Örnek: C çevresi $x^2+y^2=1$ çemberi olduğuna göre $\oint_c 4xy^3 dx + 6x^2y^2 dy$ eğrisel integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: Green formülünü kullanarak; } \oint_c 4xy^3 dx + 6x^2y^2 dy = \iint_D (12xy^2 - 12xy^2) dx \cdot dy = 0$$

Örnek: C eğrisi $y=x^2$ ve $y^2=x$ eğrilerinin sınırladığı kapalı eğri olduğuna göre; $\oint_c (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ eğrisel integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: Green formülünden; } \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \cdot dy = \iint_D (1 - 2x) dx \cdot dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dx \right) dy = \frac{1}{30}$$

“Bir eğri üzerinde $\vec{F}$ bir vektör fonksiyonu $\vec{n}$ birim vektör ise; $\iint_D (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dx \cdot dy = \oint_c \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds$ dir. $\iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} \cdot dx \cdot dy = \oint_D \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{k} \cdot dx \cdot dy = \oint_c \vec{F} \cdot \vec{\tau} \cdot ds$ Green formülünün vektörel şeklidir. Burada $\vec{\tau} = \frac{\partial x}{\partial s} i + \frac{\partial y}{\partial s} j$ dir.

YÜZEY İNTEGRALLERİ:

$L(x,y,z)$, bir S yüzey parçası üzerinde bir fonksiyon ve S düzgün bir yüzey olsun. S yüzeyinin denklemi S' 'yi içine alan bir D bölgesinde sürekli ve türevlenebilirdir. Bu durumda yüzey integrali $\iint_S L(x,y,z).ds = \iint_D L(x,yf(x,y)).sec\gamma. dx. dy$ dir.

Burada $\iint_D sec\gamma. dx. dy = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx. dy$ dir. Yüzey integrali vektörel olarak; yüzeyin her noktasında tanımlı bir $\vec{F} = L(x,y,z)\vec{i} + M(x,y,z)\vec{j} + N(x,y,z)\vec{k}$ ve $\vec{n}$ yüzeyin pozitif tarafına (dışa) yönelmiş bir normal vektör ise; $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}.ds$ yüzey integraline $\vec{F}$ vektör alanının S yüzeyinden geçen akısı denir. Koordinat eksenleri üzerinde izdüşümlerin yüzey integraleri; $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}.ds = \iint_S L.dy.dz + M.dz.dx + N.dx.dy$ şeklindedir.

Örnek: S yüzeyi, köşeleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ve $(0,0,1)$ olan üçgen olduğuna göre $\iint_S x.dydz + y.dzdx + z.dxdy$ yüzey integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } \iint_S x.dydz + y.dzdx + z.dxdy = \iint_D \left(-L\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y} + N\right) dx.dy = \iint_D (x+y+z)dx.dy$$

Üçgenin denklemi $x+y+z=1 \rightarrow z=1-x-y$ ve D bölgesinde $x+y=1$ doğrusunun $x=0, y=0$ eksenleri ile meydana getirdiği üçgen bölgedir. Bu durumda integral; $\iint_D (x+y+z).dx.dy = \iint_D dx.dy = AlanD = \frac{1}{2}$ olur.

Örnek: S yüzeyi $x^2+y^2=1$ silindirin xoy düzleminin üst tarafında kalan kısmı ve $\vec{V} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j}$ olduğuna göre $\iint_S rot\vec{V} \cdot \vec{n}.ds$ integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } rot\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & 0 \end{vmatrix} = (3x^2 + 3y^2)k \rightarrow rot\vec{V} \cdot \vec{n} = (3x^2 + 3y^2)k \cdot (\cos\alpha.i + \cos\beta.j + \cos\gamma.k) =$$

$$(3x^2 + 3y^2)\cos\gamma \rightarrow \iint_S rot\vec{V} \cdot \vec{n}.ds = \iint_S 3(x^2 + y^2)\cos\gamma.ds = \iint_D 3(x^2 + y^2)dxdy = 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^2 \rho.d\rho\right) d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

STOKES TEOREMİ:

“Bir vektörün, bir yüzeyi sınırlayan kapalı çevre boyunca sirkülasyonu, vektör rotasyonelinin bu yüzeyden geçen akısına eşittir.”

Buna **Stokes Teoremi** denir. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}.ds$ formülü şeklindedir.

Örnek: C eğrisi $x^2+y^2=1, z=2$ çemberi ve $\vec{u} = -3y\vec{i} + 3x\vec{j} + \vec{k}$ olduğuna göre Stokes teoreminden faydalanarak $\int_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$ integralini hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & 1 \end{vmatrix} = i(0) - j(0) + k(3+3)$$

$$\int_C \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_C -3ydx + 3xdy + dz \rightarrow \int_C \vec{u} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{n}.ds = \iint_S (0-0)dydz + (0-0)dzdx + (3+3)dxdy = 6 \iint_D dxdy = 6\pi$$

Örnek: $\vec{A} = 2yxi - (x+3y-2)j + (x^2+z)k$ ve S yüzeyi $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$ silindirlerinin I. bölgede sınırladıkları yüzey olduğuna göre $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n}.ds$ yüzey integralini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: Stokes teoremine göre; } \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n}.ds &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C 2yzdx - (x+3y-2)dy + (x^2+z)dz \rightarrow \text{Bu integral 4} \\ \text{eğri integralin toplamından oluşur (I.bölgede çizilen silindirler için). } \int_{C_1} (x^2+z)dz &= \int_a^0 (a^2 - z^2 + z)dz = \frac{-2a^3}{3} - \frac{a^2}{2} \rightarrow \\ \int_{C_2} -(x+3y-2)dy &= \int_0^a (-\sqrt{a^2-y^2} - 3y+2)dy = \frac{-\pi a^2}{4} - \frac{3a^2}{2} + 2a \rightarrow \int_{C_3} z.dz = \frac{a^2}{2} \rightarrow \int_{C_4} (-3y+2)dy = \\ \int_a^0 (-3y+2)dy &= \frac{3a^2}{2} - 2a \rightarrow \text{Toplam } \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n}.ds = -\frac{a^2}{12}(3\pi+8a) \end{aligned}$$

DİVERJANS TEOREMİ (Ostrogradsky Formülü):

$\iiint_V \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) dx.dy.dz = \iint_S L.dy.dz + M.dz.dx + N.dx.dy$ formülüne Ostrogradsky formülü denir. Bu ifadenin vektör formu $\iiint_V div\vec{F}.dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}.ds$ şeklindedir.

Örnek: S yüzeyi $x^2+y^2+z^2=1$ küre yüzeyi olduğuna göre $\iint_S x \cdot dydz + y \cdot dx dz + z \cdot dx dy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Ostrogradsky formülünden; $\iint_S x \cdot dydz + y \cdot dx dz + z \cdot dx dy = \iiint_V (1 + 1 + 1) dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = 3 \frac{4}{3} \pi 1^3 = 4\pi$

İntegral işareti altında türev:

$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx$ şeklinde Leibnitz formülüyle hesaplanır.

Örnek: $F(y) = \int_0^1 \log(x^2 + y^2) dx$ olduğuna göre $\frac{dF}{dy}$ 'yi hesaplayınız.

Çözüm: $\frac{dF}{dy} = \frac{d}{dy} \int_0^1 \log(x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \log(x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2} dx = 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{y}\right)$

Örnek: $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ eşitliğinden faydalananarak $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $I(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2} a^{-1/2}$ diyelim. $I'(a) = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) a^{-3/2}$, $I''(a) = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{3}{2} a^{-5/2}$, ..., $I^{(n)}(a) = \frac{\pi}{2} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} a^{-(2n+1)/2} \rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!} a^{-(2n+1)/2} \rightarrow a=1$ için $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}$ olur.

“İntegral sınırlarının α ya bağlı olması durumunda $dI/d\alpha$ türevi; $\frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx + f[b(\alpha), \alpha] \frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha] \frac{da}{d\alpha}$ olur.”

Alıştırırmalar:

1) $y=\ln x$ eğrisinin $x=e$ ve $y=0$ doğruları ile sınırladığı bölgenin alanını iki katlı integral kullanarak bulunuz. (Cevap: 1)

2) $z=x^2+y^2$ parabolünün içinde ve $z=1$ düzleminin altında bulunan cismin hacmini iki katlı integral kullanarak bulunuz. (Cevap: $\pi/2$)

3) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+3y^3}} dy dx$ integralini hesaplayınız. (Cevap: $2/9$)

4) $\int_0^1 \int_{2y}^{5-3y} \frac{x-2y}{(3y+x)^2} \cos(3y+x) dx dy$ integralini hesaplayınız. (Cevap: $\sin 5/10$)

5)R bölgesi $x=2$, $y=x$ doğruları ve xy parabolü ile sınırlı bölge ise $\iint_R \frac{x^2}{y^2} dA$ integralini hesaplayınız. (Cevap: 9/4)

6)R bölgesi $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ parabolü ile sınırlı bölge ise $\iint_R xy dA$ integrali kaçtır? (Cevap: 1/280)

7)Kutupsal koordinatları kullanarak $\iint_R (x^2 + y^2) dA$ integralini $R = \{(x, y): x^2 + (y + 2)^2 \leq 4\}$ bölgesinde hesaplayınız. (Cevap: 24π)

8) $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_1^2 x \cdot \cos y \cdot \sin z \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ integralini hesaplayınız. (Cevap: 3)

9) $z=x^2+y^2$ ve $z=8-x^2-y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini üç katlı integral ile hesaplayınız. (Cevap: 16π)

10) $x=0$, $y=0$, $z=y$ düzlemleri ile $y^2=4-x$ silindirin birinci bölgede sınırladığı hacmi hesaplayınız. (cevap: 4)

11) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx$ integralini kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesaplayınız. (Cevap: π)

12) D bölgesi $x-y=1$, $x-y=2$, $x+y=2$ ve $x+y=4$ ile sınırlı bölge olmak üzere; $u=x-y$, $v=x+y$ dönüşümü yaparak $\iint_D \frac{(x-y)^2}{x+y} dA$ integralini hesaplayınız. (Cevap: $\frac{7}{6} \ln 2$)

13) $z=0$, $x^2+z=1$, $y^2+z=1$ yüzeylerinin sınırladığı cismin ağırlık merkezini bulunuz. (Cevap: $x=y=0$, $z=1/3$)

14) $\vec{V} = (2xz, y^2z, xy)$ ise $\vec{\nabla} \vec{V}$ ve $\vec{\nabla} x \vec{V}$, $(2,1,-1)$ noktasında nedir? (Cevap: -4 ve $i+3j$)

15) $f(x,y,z)=2x^3y^2z^4$ olduğuna göre $\text{div}(\text{grad} F)$ 'yi hesaplayınız. (Cevap: $12xy^2z^4+4x^3z^4+24x^3y^2z^2$)

16) $z=x^3+y^2-4xy$ skaler fonksiyonun laplasyeni ($\nabla^2 z$) nedir? (Cevap: $6x+2$)

17) C eğrisi $O(0,0) \rightarrow A(3,0) \rightarrow B(4,2) \rightarrow O(0,0)$ şeklinde (OBC) üçgeninin çevresi olduğuna göre verilen yönü dikkate alarak $\int_C y^2 dx - x^2 dy$ eğrisel integralini hesaplayınız. (Cevap: $-35/2$)

18) $\int_{(0,1,-1)}^{(1,2,3)} z^2 dx + y^2 dy - xyz dz$ eğrisel integralini sınırlarını birleştiren doğru boyunca hesaplayınız. (Cevap: $4/3$)

19) C eğrisi $y=x^2$ ve $x=y^2$ eğrilerinin sınırladığı kapalı bir eğri olduğuna göre $\oint_C (y-x^2)dx + (y^2-x)dy$ eğrisel integralini hesaplayınız. (Cevap: $-2/3$)

20) $\vec{F} = 18zi - 12j + 3yk$ ve S yüzeyi $2x+3y+6z=12$ düzleminin birinci bölgesindeki kısmı olduğuna göre $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS$ yüzey integralini hesaplayınız. (Cevap: 24)

BÖLÜM-4

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ:

1)FOURIER VE LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ:

İntegral dönüşümleri genel olarak x gerçel değişkenlerinin fonksiyonu olan f(x) ile, k gerçel değişkenlerinin fonksiyonu olan F(k) arasında $F(k)=T[f(x)]=\int_a^b f(x)K(k,x)dx$ şeklinde integral ile tanımlanır. Buradaki $F(k)=T[f(x)]$ fonksiyonuna; f(x) esas fonksiyonunun integral dönüşümü, dönüşümün cinsini belirleyen K(k,x) fonksiyonuna da kernel çekirdek fonksiyonu denir. Böyle bir dönüşümle x ve k uzayları birbirine bağlanır. Tanımlanan yeni F(k) fonksiyonuyla çoğu kez işlem yapmak, f(x) esas fonksiyonuyla işlem yapmaktan daha kolay olur ve yapılacak ters dönüşümle tekrardan x uzayında orijinal problemin çözümüne geçilir.

En çok kullanılan dönüşümler:

1)Fourier $\rightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$

2)Laplace $\rightarrow F(k) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-kx} dx$

3)Mellin $\rightarrow F(k) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot x^{k-1} dx$

4)Hankel (Fourier-Bessel) $\rightarrow F(k) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot x \cdot J_n(kx) \cdot dx$

5)Laguerre $\rightarrow F(k) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-x} \cdot L_k(x) \cdot dx$

A) FOURIER DÖNÜŞÜMÜ:

$F(k) = T[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$, ifadesi f(x) fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. Ters dönüşümü $f(x) = T^{-1}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \cdot e^{ikx} dk$ şeklindedir.

Üç boyutlu uzayda Fourier dönüşümü; $F(\vec{k}) = T[f(\vec{r})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) \cdot e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{r}$ şeklindedir.

Fourier dönüşümlerinin özellikleri:

1) $T[f(x)] = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{k}{c}\right)$, (c≠0 ve gerçel sayı)

2) $T[f(-x)]=F(-k)$

3) $T[f(x-c)]=e^{-ick}F(k)$, (c=sabit)

4) $T[e^{ik_0x}f(x)] = F(k - k_0)$, (k₀ gerçel bir sayı)

5) $T[f(cx + a)] = \frac{1}{|c|} e^{-ika/c} \cdot F\left(\frac{c}{k}\right)$

6) $T[f^*(x)] = F^*(-k)$

7) Fourier dönüşümleri lineer dönüşümlerdir; $T[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 T[f_1(x)] + c_2 T[f_2(x)] = c_1 F_1(k) + c_2 F_2(k)$

Fourier dönüşümlerinin trigonometrik şekli:

a) Fourier cosinüs dönüşümü:

$$F_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_c(x) \cdot \cos kx \cdot dx \rightarrow \text{ters dönüşümü } f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(k) \cdot \cos kx \cdot dk$$

b) Fourier sinüs dönüşümü:

$$F_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_s(x) \cdot \sin kx \cdot dx \rightarrow \text{ters dönüşümü } f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(k) \cdot \sin kx \cdot dk$$

Türevlerin Fourier dönüşümleri:

n.mertebeden türevin Fourier dönüşümü $F^{(n)}(k) = T[f^{(n)}(x)] = (ik)^n F(k)$ şeklinde tanımlanır. Türevlerin Fourier cosinüs ve sinüs dönüşümleri de örneğin 1. ve 2. mertebeden; $F_c^{(1)}(k) = k F_s(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$ ve $F_s^{(1)}(k) = -k F_c(k)$; $F_c^{(2)}(k) = -k^2 F_c(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f^{(1)}(0)$ ve $F_s^{(2)}(k) = -k^2 F_s(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot k \cdot f(0)$

Parseval teoremi:

$F_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri $F_1(k)$ ve $F_2(k)$, kompleks eşlenikleri $f_1^*(x)$ ve $f_2^*(x)$, $F_1^*(k)$, $F_2^*(k)$ olmak üzere; $\int_{-\infty}^\infty f_1(x) \cdot f_2^*(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^\infty F_1(k) \cdot F_2^*(k) \cdot dk$ eşitliğine Parseval teoremi denir. Bu bağıntı optik, elektromanyetizma ve kuantum mekaniğinde kullanılır.

Dirac Delta Fonksiyonunun $\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ix(k-k')} dx$ tanımı kullanılarak Parseval teoremi $\int_{-\infty}^\infty f_1(x) \cdot f_2^*(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^\infty F_1(k) \cdot F_2^*(k) \cdot dk$ en genel haliyle yazılabilir. Bu teorem kuantum mekaniğinde $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |F(k)|^2 dk$ biçiminde yazılabilir.

Konvolüsyon (Faltung) Teoremi:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f_1(y) \cdot f_2(x - y) \cdot dy$ şeklinde tanımlanan integrale bu fonksiyonun $(-\infty, \infty)$ aralığındaki konvolüsyonu denir. Konvolüsyonun Fourier dönüşümü $T[f(x)] = T[f_1^*(x) \cdot f_2(x)] = F_1(k) F_2(k)$, bunun ters dönüşümü $f(x) = [f_1^*(x) \cdot f_2(x)] = T[F_1(k) F_2(k)]$ dır.

Örnek: $a > 0$ olmak üzere $f(x) = e^{-ax^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

$$\text{Çözüm: } F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} (\cos kx - i \sin kx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a} \right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/4a}$$

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{L} & -L < x < 0 \\ 1 - \frac{x}{L} & 0 < x < L \end{cases}$ üçgen puls fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: $F(k) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-L}^0 \left(1 + \frac{x}{L} \right) e^{-ikx} dx + \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) e^{-ikx} dx \right]$, $f(x)$ çift fonksiyon fourier cosinüs dönüşümü uygulanır.

$F_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \cdot \cos kx \cdot dx = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1 - \cos kL}{k^2} \right] = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin^2(\frac{kL}{2})}{k^2} \right]$ olur. Bu durumda tepenin genişliği $\rightarrow \Delta x = 2L$, k uzayındaki genişliği $\rightarrow \Delta k = 4\pi/L$, bunların çarpımı $\Delta x \cdot \Delta k = 8\pi$ olur.

B) LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ:

$F(x)$ fonksiyonu x 'in tüm pozitif değerleri için tanımlı olmak üzere ($x < 0$ iken $f(x) = 0$ olduğu kabul edilir) Laplace dönüşümü $F(s) = L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot f(x) \cdot dx$ şeklinde tanımlanır. Burada s parametresi gerçel, s sanal iken Fourier dönüşümüne götürür. $F(s)$ 'nin ters laplace dönüşümü olan $f(x)$ fonksiyonu; $f(x) = L^{-1}[F(s)]$ olur.

Laplace dönüşümlerinin özellikleri:

$$1) L[f(x)] = (1/c) F(s/c), (c > 0)$$

$$2) L[e^{cx} f(x)] = F(s - c)$$

$$3) L[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 L[f_1(x)] + c_2 L[f_2(x)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$4)L[f(x+c)]=e^{cs}F(s), (c>0)$$

$$5)L[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), (n=1,2,3,\dots)$$

$$6)L[x^{-n} f(x)] = \int_s^\infty \dots \int_s^\infty F(s) \cdot (ds)^n$$

$$7)L\left[\int_0^x \dots \int_0^x f(x')(dx')^n\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

$$8)L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(s') \cdot ds'$$

$$9)L[f(x)] = \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^p e^{-sx} f(x) dx, \{f(x+p) = f(x), p > 0\}$$

10)Laplace dönüşümleri yaparken trigonometrik fonksiyonlar için Euler açılımları kullanılır.

Örnek: $f(x)=\cosh(4x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\text{Çözüm: } L[\cosh 4x] = L\left[\frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}\right] = \frac{1}{2}\{L[e^{4x}] + L[e^{-4x}]\}$$

$$L[e^{4x}] = \int_0^\infty e^{4x} e^{-sx} dx = \frac{1}{s-4} \text{ ve } L[e^{-4x}] = \int_0^\infty e^{-4x} e^{-sx} dx = \frac{1}{s+4}$$

$$L[\cosh 4x] = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4}\right\} = \frac{s}{s^2-16} \text{ bulunur.}$$

$$\text{Örnek: } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 4 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases} \text{ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.}$$

$$\text{Çözüm: } L[f(x)] = \int_1^2 4 \cdot e^{-sx} dx = \left[\frac{-4}{s} e^{-sx}\right]_1^2 = \frac{4}{s}(e^{-s} - e^{-2s})$$

Örnek: $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\text{Çözüm: } L[\sin x] = L\left[\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right] = \frac{1}{2i}\{L[e^{ix}] - L[e^{-ix}]\}$$

$$L[e^{ix}] = \int_0^\infty e^{ix} e^{-sx} dx = \frac{1}{s-i} \text{ ve } L[e^{-ix}] = \int_0^\infty e^{-ix} e^{-sx} dx = \frac{1}{s+i}$$

$$L[\sin x] = \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right\} = \frac{1}{s^2+1}$$

Laplace dönüşüm tablosu:

f(x)	F(s)=L[f(x)]
1	1/s
x	1/s ² (s>0)
x ⁿ (n=0,1,2,3,...)	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ ($\Gamma(n+1)=n!$, s>0)
e ^{ax}	$\frac{1}{s-a}$ (s>a)
sinax	$\frac{a}{s^2+a^2}$ (s>0)
cosax	$\frac{s}{s^2+a^2}$ (s>0)
sinhax	$\frac{a}{s^2-a^2}$ (s> a)
coshax	$\frac{s}{s^2-a^2}$ (s> a)
x.sinax	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
x.e ^{-ax}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
e ^{ax} .sinbx	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
e ^{ax} .cosbx	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
x ⁿ⁻¹ .e ^{-ax}	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$
$\delta(x-c)$	e ^{-cs}
U _c (x).f(x-c)	e ^{-cs} .F(s)

Türevlerin Laplace dönüşüm tablosu:

$f'(x)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(x)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(x)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\dots-f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^x f(Y).dY = U(Y).f(Y)$	$\frac{1}{s}F(s)$ (U(Y) basamak fonksiyonu)
$f(x)/x$	$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$
$f(x-a)U(x-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\lambda^{(n)}f(x)$ (n türev derecesi)	$(-1)^nF^{(n)}(s)$

Türevlerin Laplace dönüşümü:

$$L[f'(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{df(x)}{dx} . dx = e^{-sx} f(x) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = sL[f(x)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

$$L[f''(x)] = s^2L[f(x)] - sf(0) - f'(0)$$

$$L[f'''(x)] = s^3L[f(x)] - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$L[f^{(n)}(x)] = s^nL[f(x)] - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Ters Laplace dönüşümü:

$f(x) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s).e^{sx} ds$, buradaki integrale Bromwich integrali denir. Fourier dönüşümünde $s=c+ik$ şeklinde tanımlanmıştı.

$f(x)=L^{-1}[F(s)]$ olmak üzere Ters Laplace dönüşümlerinin özellikleri:

$$1) L^{-1}[F(cs)] = \frac{1}{c} f\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$2) L^{-1}[e^{-cs}F(s)] = \begin{cases} f(x-c) & x > c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

$$3) L^{-1}[c_1F_1(s) + c_2F_2(s)] = c_1L^{-1}[F_1(s)] + c_2L^{-1}[F_2(s)] = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$$

$$4) L^{-1}[F(s-c)] = e^{cx}f(x)$$

$$5) L^{-1}[sF(s)] = \frac{d}{dx}f(x) \text{ (f(0)=0 iken)}$$

$$6) L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^x f(x').dx'$$

$$7) L^{-1}\left[\int_s^\infty F(s').ds'\right] = \frac{f(x)}{x}$$

$$8) L^{-1}[F^{(n)}(s)] = L^{-1}\left[\frac{d^n F(s)}{ds^n}\right] = (-1)^n x^n f(x)$$

Örnek: $y''(x)+w^2y(x)=0$ diferansiyel denklemini $y(0)=1, y'(0)=0$ başlangıç koşulları altında çözünüz.

Çözüm: $L[y(x)]=Y(s)$ olmak üzere, $L[y''+w^2y]=L[y''] + w^2L[y]=0 \rightarrow s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+w^2Y(s)=0 \rightarrow s^2Y(s)-s+Y(s)=0 \rightarrow Y(s) = \frac{s}{s^2+w^2} \rightarrow y(x) = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+w^2}\right] = \cos wx$

Örnek: $y''-y'-6y=4e^{2x}$ diferansiyel denklemini $y(0)=0, y'(0)=1$ başlangıç koşulları altında çözünüz.

Çözüm: $L[y''-y'-6y]=4L[e^{2x}] \rightarrow L[y'']-L[y']-6L[y]=4L[e^{2x}] \rightarrow s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-sY(s)+y(0)-6Y(s)=4[1/(s-2)] \rightarrow s^2Y(s)-1-sY(s)-6Y(s)=4/(s-2) \rightarrow Y(s) = \frac{s+2}{(s-2)(s^2-s-6)} = \frac{1}{(s-2)(s-3)} \rightarrow y(x) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right] = L^{-1}\left[\frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}\right] = L^{-1}\left[\frac{-1}{s-2} + \frac{1}{s-3}\right] \rightarrow y(x) = -e^{2x} + e^{3x}$

Örnek: $y''(x)-xy'(x)+y(x)=1$ diferansiyel denklemini $y(0)=1, y'(0)=2$ başlangıç koşulları altında çözünüz.

Çözüm: $L[y'']-L[xy'] + L[y]=L[1] \rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - (-1)\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \frac{1}{s} \rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) + sY'(s) + Y(s) = \frac{1}{s} \rightarrow s^2Y(s) - s - 2 + 2Y(s) + sY'(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y'(s) + \left[s + \frac{2}{s}\right]Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 1 \rightarrow$ Bu

denklem $Y(s)=u.v$ dönüşümüyle çözülebilir. $u = e^{-\left[\frac{s^2}{2} + 2\ln s\right]} = s^{-2}e^{-s^2/2}$ ve $v = \int s^2e^{s^2/2} \left[1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right] = (s+2)e^{\frac{s^2}{2}} + c$. Bu

durumda $Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{-s^2/2} \rightarrow$ son terim seriye açılır ve ters laplace dönüşümü yapılarak c'ye bağlı olarak bulunur. Yaklaşık bir çözüm $y(x)=1+(2+c)x$ şeklindedir.

Örnek: $\frac{dy}{dx} + y + 2z = 0$ ve $\frac{dz}{dx} + 2y - z = 0$ diferansiyel denklem sistemini $y(0)=4, z(0)=1$ başlangıç koşulları altında çözünüz.

Çözüm: $L[y(x)]=Y(s), L[z(x)]=Z(s)$ olmak üzere denklem sisteminin Laplace dönüşüm matris formu;

$\begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur. Buradan $Y(s)$ ve $Z(s)$ fonksiyonları; $Y(s) = \frac{4s-6}{(s+1)(s-3)} = \frac{5}{2(s+1)} + \frac{3}{2(s-3)}$ ve $Z(s) = \frac{s-9}{(s+1)(s-3)} = \frac{5}{2(s+1)} - \frac{3}{2(s-3)}$ olur. Ters Laplace dönüşümleri ile; $y(x) = \frac{5}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{3x}$ ve $z(x) = \frac{5}{2}e^{-x} - \frac{3}{2}e^{3x}$ olur.

Örnek: $y(t) + \int_0^t x(u).du = 2e^{-t}$ ve $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + x(t) = 0$ integro-diferansiyel denklem sisitemini $y(0)=y'(0)=0$ başlangıç koşulları altında çözünüz.

Çözüm: $L[y(t)]=Y(s), L[x(t)]=X(s)$ ve $L\left[\int_0^t x(u).du\right] = \frac{X(s)}{s}$ olmak üzere; denklem sisteminin Laplace dönüşümü alınır, $Y(s) + \frac{X(s)}{s} = \frac{2}{s+1}$ ve $s^2Y(s) + X(s) = 0$ elde edilir. Buradan $Y(s) = \frac{-2}{s^2-1}$ ve $X(s) = \frac{2s^2}{s^2-1} = 2\left[1 + \frac{1}{s^2-1}\right]$ olur. Ters Laplace dönüşümüyle; $y(t) = -2\sin t$ ve $x(t) = 2\delta(t) + \sin t$ elde edilir.

Örnek: $\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$, x yönünde v hızıyla ilerleyen bir elektromanyetik dalganın $E(x,0)=0, \frac{\partial E(x,0)}{\partial t} = 0$ başlangıç koşulunda $E(x,t)$ dalga fonksiyonunu bulunuz ($x=0$ da $E(0,t)=E_0.\sin wt$ dir).

Çözüm: $L\left[\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2}\right] = L\left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}\right] \rightarrow \frac{\partial^2 e(x,s)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \left[s^2 e(x,s) - sE(x,0) - \frac{\partial E(x,0)}{\partial t}\right] = \frac{s^2}{v^2} e(x,s) \rightarrow e(x,s) = A.e^{-xs/v} + B.e^{xs/v}$ elde edilir. $x \rightarrow \infty$ iken $B=0$, $x \rightarrow 0$ iken $A=e(0,s)$ olur. Bu durumda $e(x,s) = e(0,s)e^{-xs/v}$ ve $x=0$ için $E(0,t)=E_0.\sin wt$ yi kullanarak $e(0,s)=L[E_0.\sin wt]=(E_0w)/(s^2+w^2)$, buradan da $e(x,s) = \frac{E_0w}{s^2+w^2} e^{-xs/v}$; ters Laplace dönüşümünden $E(x,t) = E_0.\sin w\left(t - \frac{x}{v}\right)$ elde edilir.

Konvolüsyon teoremi:

$$h(x)=(f^*.g)(x)=F^*.G$$

bilinen bir $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları yardımıyla $h(x)=L^{-1}[F(s)G(s)]$ fonksiyonunun hesabı konvolüsyon teoremi yardımıyla; $h(x)=(f^*g)(x)=\int_0^x f(y)g(x-y)dy = F^*G$ den hesaplanır.

Konvolüsyonun özellikleri:

1) $f^*g=g^*f$, 2) $f^*(g_1+g_2)=f^*g_1+f^*g_2$, 3) $(f^*g)^*h=f^*(g^*h)$, 4) $f^*0=0^*f=0$, 5) $f^*1 \neq f$ (genelde).

Örnek: $H(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: $L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos 2x$, $L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{\sin 2x}{2} \rightarrow$ konvolüsyon teoremini de kullanarak $h(x) = \frac{1}{4}.x.\sin 2x$ bulunur.

KOMPLEKS ANALİZ:

1) KOMPLEKS SAYILAR:

18.yy'nin başlarında $x^2+2x+2=0$ tipindeki cebirsel denklemin köklerinin $x_{1,2} = -1 \mp \sqrt{-1}$ şeklinde bulunması esnasında G.Cardano tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra $\sqrt{-1} = i$ 'ye sanal (imaginary) tanımlaması yapılmıştır.

Kompleks analizin temelleri 19.yy'da A.Cauchy tarafından atılmış ve P.Diriclet, G.F.B.Riemann ve K.Weierstrass tarafından geliştirilmiştir. Bir kompleks sayı genel olarak x ve y gerçel sayılar olmak üzere $z=x+iy$ şeklinde tanımlanır. Burada z 'nin gerçel ve sanal kısımları $\text{Re}z=x, \text{Im}z=y$ dir. z 'nin kompleks eşleneği $z^*=x-iy$ dir ($i^2=-1$).

Kompleks sayılarda bazı kurallar:

1) $Z_1+Z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$, 2) $Z_1Z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_1+x_2y_1)$, 3) Z_1/Z_2 (pay ve payda paydanın eşleneği ile çarpılarak ifade $a+bi$ şekline getirilir), 4) $Z.Z^*=(x+iy)((x-iy)=x^2+y^2$

Kompleks sayıların geometrik tanımı, kökü ve kuvveti:





Şekildeki diyagrama bir kompleks sayının vektör diyagramı denir. $r = |Z|$ (boy-modüle mutlak değer), $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta \rightarrow Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dır. Burada θ ya kompleks sayının argümanı denir. $r = \text{Mod}Z = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\theta = \text{Arg}Z = \text{Arctan}(y/x)$ dir. $\theta = \theta_p + 2k\pi$ ($k=0,1,2,\dots$)'da θ_p argümanına Z 'nin baş argümanı denir.

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ifadesini Euler formülü ile $Z = r \cdot e^{i\theta}$ biçiminde yazabiliriz. Bu durumda $Z^n = (r \cdot e^{i\theta})^n \rightarrow Z^n = [r^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))]$ (de Moivre teoremi kullanıldı) olur. $Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n}\right) \right] = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{v_p + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{v_p + 2k\pi}{n}\right) \right]$, burada $\theta \leq v_p \leq 2\pi$, $k=0,1,2,\dots$ dır.

Özdeşlikler: 1) $e^\theta = \cosh\theta + i\sinh\theta$, 2) $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$, 3) $\cosh\theta = (1/2)[e^\theta + e^{-\theta}]$, 4) $\sinh\theta = (1/2)[e^\theta - e^{-\theta}]$, 5) $\sinh(i\theta) = i \cdot \sin\theta$, 6) $\sin(i\theta) = i \cdot \sinh\theta$

Örnek: $Z = \frac{1-i}{1+i}$ karmaşık sayısını; a) $Z = x + iy$ şeklinde gösteriniz, b) $\text{Re}Z$, $\text{Im}Z$, $\text{Mod}Z$ ve $\text{Arg}Z$ 'yi bulunuz.

Çözüm: a) $Z = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = -i$, b) $x = \text{Re}Z = 0$, $y = \text{Im}Z = -1$, $\text{Mod}Z = |Z| = [0^2 + (-1)^2]^{1/2} = 1$, $\text{Arg}Z = \theta = \text{Arctan}(-1/0) = 3\pi/2$

Örnek: $Z^5 - 1 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm: $Z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (x + iy)^n = W \rightarrow W = 1$ için $x = 1$ ve $y = 0$ olmalı. $Z = (1)^{1/5} \{ \cos[(0 + 2k\pi)/5] + i \sin[(0 + 2k\pi)/5] \} \rightarrow Z_1 = 1$, $Z_2 = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$, $Z_3 = \cos(4\pi/5) + i\sin(4\pi/5)$, $Z_4 = \cos(6\pi/5) + i\sin(6\pi/5)$, $Z_5 = \cos(8\pi/5) + i\sin(8\pi/5)$

Örnek: $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ üçgen eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: $|Z_1 + Z_2|^2 = (Z_1 + Z_2)(Z_1 + Z_2)^* = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + (Z_1^* Z_2)^* + Z_1^* Z_2$, $x = \text{Re}Z = (Z + Z^*)/2$, $(Z_1^* Z_2)^* + Z_1^* Z_2 = 2\text{Re}(Z_1^* Z_2) \rightarrow |Z_1 + Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2\text{Re}(Z_1^* Z_2) \rightarrow \text{Re}(Z_1^* Z_2) \leq |Z_1^* Z_2|$ olur. Bu durumda $|Z_1 + Z_2|^2 \leq (|Z_1| + |Z_2|)^2 \rightarrow |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ olur.

Tek kompleks değişkenli fonksiyonların analitik ve düzenli olma koşulu:

Bir $f(z)$ fonksiyonu karmaşık düzlemin bir B bölgesindeki her noktada tek bir türeve sahipse, $f(z)$ fonksiyonun B bölgesinde analitik olduğu, hem analitik hem de tek değerli ise o zaman düzenli olduğu söylenir.

Örnek: $f(z) = z^2 + 1$ fonksiyonunun analitik olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f_1'(z) = f_2'(z) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ analitiklik için Cauchy-Riemann koşullarını kullanalım. $f(z) = (x + iy)^2 + 1 = x^2 - y^2 + 1 + 2ixy \rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ ve $v(x, y) = 2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow 2x = 2x$, ve $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow -2y = -2y$ olduğundan analitiktir.

2) KOMPLEKS İNTEGRAL:

1) Çevre (Kontur) integrali:

Tek gerçel değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan integral teoremi tek karmaşık değişkenli fonksiyonlar için de geçerli olup, $I = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty, |\Delta z_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i) \Delta z_i$ şeklinde tanımlanır. Buradaki I 'ya $f(z)$ 'nin çevre (kontur) integrali denir. Burada ϵ_i ; c üzerinde z_{i-1} ile z_i arasında bir noktadır.

Cauchy teoremi:

Basit kapalı c eğrisinin çevrelediği tek bağımlı bir B bölgesinin bütün noktalarında ve c eğrisinin üzerinde; $f(z)$ fonksiyonu analitik, kısmi türevleri ise sürekli olmak koşuluyla $f(z)$ 'nin c üzerinden kompleks integrali sıfırdır; $\oint_c f(z) dz = 0$. Bu bağıntıya Cauchy integral teoremi denir.

$\oint_c f(z) dz = \oint_c (u + iv)(dx + idy) = \oint_c (u \cdot dx - v \cdot dy) + i \oint_c (u \cdot dy + v \cdot dx) \rightarrow \oint_c f(z) dz = \iint_B \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \cdot dy + i \iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \cdot dy$. Burada Cauchy-Riemann koşullarının kullanılmayışıyla her iki integral içinin sıfır olduğu görülür. Bu teoreme Cauchy-Coursat ve Monrena teoremleri uygulanarak; $\oint_c f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{c_k} f(z) dz$ genel hale getirilir.

Örnek: $\oint \frac{dz}{z-z_0}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: C eğrisinin sınırladığı B bölgesinin fonksiyonu $f(z)=1/(z-z_0)$, $z=z_0$ da analitik değildir. C eğrisinin içinde alınan z_0 merkezli ve sonsuz küçük yarıçaplı $|z-z_0|=r$ çemberini c bölgesine bağlayan c_1 kapalı bölgesine Cauchy-Coursat teoremi uygulanırsa; $\oint_c \frac{dz}{z-z_0} = \oint_{c_1} \frac{dz}{z-z_0}$ olur. Sağdaki integralde $z-z_0=re^{i\theta}$, $dz=ir \cdot e^{i\theta} \cdot d\theta$ dönüşümüyle; $\oint_c \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{r \cdot i \cdot e^{i\theta} d\theta}{r \cdot e^{i\theta}} = 2\pi i$ elde edilir.

Cauchy İntegral Formülü:

$F(z)$ fonksiyonu C basit kapalı eğrisi tarafından sınırlanan B bölgesinde analitik olmak üzere ve z_0 noktası bu bölgede kalması koşuluyla $\oint_C \frac{f(z) \cdot dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$ ifadesine Cauchy integral formülü denir. Eğer z_0 noktası C kapalı eğrisinin dışında ise integral sifıra eşit, eğrinin üzerinde ise $\pi i f(z_0)$ 'a eşittir ve buna Cauchy temel değeri denir. Bu durumda;

$$\oint_C \frac{f(z) \cdot dz}{z-z_0} = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & z_0; B' \text{nin içinde} \\ 0 & z_0; B' \text{nin dışında} \\ \pi i f(z_0) & z_0; C' \text{nin üzerinde} \end{cases} \text{ dir. } f^{(n)}(z) \text{ n. mertebeden türevleri için; } f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) \cdot dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

olur.

Örnek: C eğrisi a) $|z|=1$, b) $|z|=2$ birim yarıçaplı çember olmak üzere $\oint_C \frac{\sin z \cdot dz}{2z-\pi}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: a) $2z=t \rightarrow z=t/2 \rightarrow |z|=|t/2|$, $dz=dt/2$, $|z|=|t/2|=1 \rightarrow |t|=2$, $t_0=\pi \rightarrow |t|=2$ çemberin dışında olduğundan integral sıfırdır.

b) $t_0=\pi$ noktası $|z|=|t/2|=2 \rightarrow |t|=4$ çemberin içindedir. $\oint_C \frac{\sin(\frac{t}{2}) \cdot (\frac{dt}{2})}{t-\pi} = \frac{2\pi i}{2} f(\pi) = \pi i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi i$ bulunur.

Örnek: C eğrisi $|z|=3$ çemberi olmak üzere $I = \oint_C \frac{\sin 2z \cdot dz}{(6z-\pi)^3}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $6z=t \rightarrow z=t/6$, $dz=dt/6 \rightarrow |t|=18$ çemberin içindedir. $I = \oint_C \frac{\sin(\frac{t}{3}) \cdot (\frac{dt}{6})}{(t-\pi)^3} = \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi i \cdot f^{(2)}(\pi)}{2!} \right) = \frac{\pi i}{6} \frac{d^2}{dt^2} \sin\left(\frac{t}{3}\right) \Big|_{t=\pi} = \frac{-\pi i}{36\sqrt{3}}$

F(z) fonksiyonunun Taylor ve Laurent Serileri:

$F(z)$ fonksiyonun z_0 civarında Taylor açılımı; $f(z)=f(z_0)+f^{(1)}(z_0)(z-z_0)+\dots+[f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n]/n! \rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z-z_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$

$F(z)$ fonksiyonunu z_0 civarında Laurent serisi; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$ şeklindedir. Bu seride soldaki kısım analitik, sağdaki kısım esas kısımdır. Bu serinin katsayıları; $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z) \cdot dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ ($n=0,1,2,\dots$) ve $b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z) \cdot dz}{(z-z_0)^{-m+1}}$ ($m=1,2,3,\dots$). Bu iki terim birleştirildiğinde A_n katsayısı; $A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t) \cdot dt}{(t-z_0)^{n+1}}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Özellikler:

1) b_m katsayıları sıfır ise $f(z)$; $z=z_0$ da analitiktir ve z_0 'a düzenli nokta denir.

2) $f(z)$ nin analitik olmadığı noktalara tekil singüler noktalar denir. Ör; $f(z)=1/(z-z_0) \rightarrow z=z_0$ singüler noktadır.

3) $b_m \neq 0$ fakat b_m den sonra gelen katsayılar sıfırsa $f(z)$ 'nin $z=z_0$ da m.mertebeden bir kutbunun olduğu söylenir. Ör; $f(z)=e^{3z}/(z-z_0)^4$ de $z_0=1$ dördüncü mertebeden kutup noktasıdır.

4) $b \neq 0$ sonsuz tane b katsayısı varsa, $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z)$ sonlu yapacak bir m değeri bulunamıyorsa, bu durumda $f(z)$, $z=z_0$ da esash bir tekil noktaya sahiptir. Ör; $e^{1/z} \rightarrow z=0$ 'da esash bir tekil noktaya sahiptir.

5) $f(z)$; $z=z_0$ 'da tanımsız fakat $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ limiti varsa, buradaki z_0 'a kaldırılabilir tekil nokta denir. Ör; $f(z)=\sin z/z$.

6) $f(z)$; z_0 noktasında analitik değil, bu noktanın sonsuz yakın komşuluğunda z_0 merkezli sonsuz küçük ϵ yarıçaplı bir çemberin dışında analitik oluyorsa, z_0 noktasına yalıtılmış (izole) tekil nokta denir. Bu noktalar kaldırılabilir tekil noktalardır. Ör; $f(z)=1/z$.

7) Laurent açılımındaki $1/(z-z_0)$ teriminin katsayısı olan b_1 'e $z=z_0$ noktasında $f(z)$ 'nin rezidüsü denir ve $b_1=\text{Res}(f, z_0)$ şeklinde gösterilir.

Örnek: $f(z)=e^{3z}/(z-1)^4$ fonksiyonunu Laurent serisine açınız.

Çözüm: $z-1=u \rightarrow f(u) = e^3 \frac{e^{3u}}{u^4} = \frac{e^3}{u^4} \left[1 + 3u + 9\frac{u^2}{2!} + 27\frac{u^3}{3!} + \dots \right] \rightarrow f(u) = e^3 \left[\frac{1}{(z-1)^4} + \frac{3}{(z-1)^3} + \frac{9}{2(z-1)^2} + \dots + \frac{81}{4!} + \frac{243(z-1)}{5!} + \dots \right]$. $f(z)$ 'nin $z=1$ 'de 4.dereceden kutbu vardır.

3) REZİDÜ HESABI:

C kapalı çevresi içinde $f(z)$ fonksiyonunun analitik olmadığı sonlu sayıda nokta varsa, $f(z)$ 'nin C kapalı çevresi üzerinden integrali, bu noktaların her biri için tanımlanan ve adına rezidü denilen özel sayılar yardımıyla hesaplanabilir. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n$, A_n için $n=-1$ de $\oint f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$ ifadesine Rezidü veya Cauchy-Rezidü Teoremi denir. $A_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} g(z) \Big|_{z=z_0}$ ifadesinden A_{-1} rezidüsü hesaplanır.

Kurallar:

1) $f(z)$ 'nin z_0 noktasında birinci mertebeden basit bir kutbu varsa $A_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)$ ifadesinden kolayca hesaplanır.

2) z_0 , $f(z)$ 'nin m.mertebeden kutbu ise türevli ifadeyle hesaplanır.

3) $g(z)$ ve $h(z)$, z_0 'da analitik olmak üzere ve $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0)=0$ ve $h'(z_0) \neq 0$ koşullarını sağlamak şartıyla $f(z)=g(z)/h(z)$ nin $z=z_0$ ' da basit bir kutbu varsa $A_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{h'(z)}$ ile hesaplanır.

4)Eğer $f(z)$, z_0 'da esaslı nir tekil noktasına sahip ise, rezidü Laurent serisi açılımı kullanılarak bulunur.

Birden fazla kutup noktasına sahip $f(z)$ fonksiyonu için rezidü; $\oint f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n A_{-1}^{(k)}$ ile bulunur.

Örnek: $|z|=2$ birim yarıçaplı çember üzerinden $f(z)=1/(z^2+1)$ integralini alınız.

Çözüm: $z^2+1=0 \rightarrow z_1=i, z_2=-i$, her iki kutup da $|z|=2$ yarıçaplı çemberin içindedir. $A_{-1}^{(1)} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}$, $A_{-1}^{(2)} = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} = -\frac{1}{2i}$. Bu durumda; $\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \left[\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} \right] = 0$ olur.

Örnek: $\oint_C \frac{3z.dz}{z^2+1}$ integralini $|z|=4$ birim yarıçaplı çember üzerinden hesaplayınız.

Çözüm: $z^2+1=0 \rightarrow z_1=i, z_2=-i$, her iki kutup da $|z|=4$ yarıçaplı çemberin içindedir. $\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{3z}{z^2+1} \rightarrow \lim_{z \rightarrow \pm i} (z^2+1) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \pm i} h'(z) = \lim_{z \rightarrow \pm i} 2z \neq 0$ olduğundan; $A_{-1}^{(1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{3z}{2z} = \frac{3}{2}$, $A_{-1}^{(2)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{3z}{2z} = \frac{3}{2} \rightarrow \oint \frac{3z.dz}{z^2+1} = 2\pi i \left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right] = 6\pi i$ bulunur.

Sonsuzda rezidü:

$\oint f(z)dz = 2\pi i \text{Rez}[f(z), z = \infty]$ ifadesine $f(z)$ nin sonsuzdaki rezidüsü denir. Rezirü teoremi genelleştirilirse;

$$\oint_C f(z)dz = \begin{cases} 2\pi i \sum_{k=1}^m A_{-1}^{(k)} & C' \text{ niniçinde} \\ 2\pi i \left[\sum_{k=m+1}^n A_{-1}^{(k)} + \text{Rez}[f(z), z = \infty] \right] & C' \text{ nindışında} \end{cases}$$

4) BAZI BELİRLİ İNTEGRALLERİN HESABI:

1) $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx$ tipi integraller:

$F(z)$ fonksiyonu hiçbir gerçel eksen üzerinde olmayan sonlu derecede kutup noktalarına sahip ve Jordon koşulunu sağlıyorsa $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_k A_{-1}^{(k)}$ ile hesaplanır.

Örnek: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2.dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: C kapalı çevresinde Rezidü Teoremine göre $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2.dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} \frac{z^2.dz}{(z^2+1)(z^2+4)^2}$, burada $z=R.e^{i\theta}$ dir, dönüşümünden sağdaki integral sıfırdır (Jordon koşulu). Bu durumda $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2.dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} = 2\pi i \sum_k A_{-1}^{(k)}$ integrali hesaplanır.

Kutup noktaları $(z^2+1)(z^2+4)^2=0 \rightarrow z_{1,2}=\pm i, z_{3,4}=\pm 2i$ (2.mertebeden). $A_{-1}^{(1)} = \lim_{z_1 \rightarrow i} (z-i) \frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z^2+4)^2} = \frac{i}{18}$, $A_{-1}^{(2)} =$

$$\lim_{z_3 \rightarrow 2i} \frac{1}{z-2i} \frac{d}{dz} \left[(z-2i)^2 \frac{z^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2(z^2+1)} \right] = \frac{-5i}{72} \rightarrow I = 2\pi i \left[\frac{i}{18} - \frac{5i}{72} \right] = \frac{\pi}{36} \text{ olur.}$$

2) $I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta).d\theta$ tipindeki integraller:

Bu integralleri alırken $z=e^{i\theta}$ dönüşümü yapılarak; $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$ ifadeleri integralde yerine yazılır ve hesaplama yapılır.

Örnek: $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $z=e^{i\theta}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$ dönüşümü ile integral $I = 2 \oint_C \frac{dz}{z^2(1-2i)+(6i)z-(1+2i)}$ olur. Kutup noktaları $z_1 = \frac{-5i}{1-2i}$, $z_2 = \frac{-i}{1-2i}$ dir. Burada z_1 , C kapalı çevresi dışında, z_2 ise içindedir. z_2 'ye göre hesaplama yapılır. $A_{-1}^{(1)} = \lim_{z_1 \rightarrow -i/(1-2i)} \left(z + \frac{i}{1-2i} \right) \frac{2}{z^2(1-2i)+6iz-(1+2i)} = \frac{0}{0}$ belirsizliği var. L'Hospital'dan $a_{-1}^{(1)} = \frac{1}{2i}$, buradan da sonuç; $I=2\pi i(1/2i)=\pi$ olur.

3) $I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \begin{cases} \sin mx \\ \cos mx \end{cases} dx$ tipindeki integraller:

$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{imx} dx$ $m>0$ tipindeki integraller $\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{imx} dx = 2\pi i \sum_k A_{-1}^{(k)}$ eşitliği veya $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \cos mx \cdot dx = \text{Re}[2\pi i \sum_k A_{-1}^{(k)}]$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \sin mx \cdot dx = \text{Re}[2\pi i \sum_k A_{-1}^{(k)}]$ yardımıyla hesaplanabilir.

Örnek: $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \cdot dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ olmak üzere $\rightarrow I = I_1 + iI_2 = \oint_{C_1+C_2} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$ olur. Jordon koşulu kullanılarak tek integral elde edilir. $F(z)$ 'nin kutup noktaları $\pm i$ ve $\pm 2i$ dir. Bu noktalara karşılık gelen rezidüler; $A_{-1}^{(1)} = \frac{e^{-1}}{6i}$ ve $A_{-1}^{(2)} = \frac{-e^{-2}}{12i}$ olur. Bu durumda $I = I_1 + iI_2 = 2\pi i \left[\frac{e^{-1}}{6i} - \frac{e^{-2}}{12i} \right] = \frac{\pi}{3} \left[e^{-1} - \frac{e^{-2}}{2} \right]$ olur (Burada sanal kısım I_2 sıfırdır).

Örnek: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cdot dx}{x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $z=0$ 'da gerçel eksen üzerinde basit bir kutbu olan $f(z)=e^{iz}/z$ fonksiyonunu göz önüne alarak hesaplayabiliriz. Rezidü teoremine göre $I = \oint_C \frac{e^{iz} dz}{z} = \pi i A_{-1}$ dir. $A_{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z} = 1 \rightarrow I = I_1 + iI_2 \rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i + 0 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Örnek: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)} = 2\pi i \sum_{k=1}^n A_{-1}^{(k)} + \pi i \sum_{k=1}^p A_{-1}^{(k)} \rightarrow A_{-1}^{(1)} = \lim_{z_1 \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-1)} = \frac{1}{2i(i-1)}$, $A_{-1}^{(2)} = \lim_{z_2 \rightarrow -1} (z-1) \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{1}{2} \rightarrow I = 2\pi i \left[\frac{1}{2i(i-1)} \right] + \pi i \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{-\pi}{2}$

4) $\int_0^{\infty} f(x) \cdot dx$ tipindeki integraller:

Bu tip integralleri alırken genelde izlenen kapalı çevre sağ taraftaki kapalı çevredir. Bunlar $\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{2\pi i}{(1-ia)} \sum_k A_{-1}^{(k)}$ ile hesaplanabilir. Burada $a \rightarrow f(iy) = af(x)$ de tanımlı bir sabittir.

Örnek: $I' = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $f(z)=1/(1+z^3)$ kutup noktaları; $z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)=0 \rightarrow z_1=-1$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow z_1=e^{\pi i}$, $z_2=e^{\pi i/3}$, $z_3=e^{5\pi i/3}$ olur. $f(z)$ fonksiyonunda pozitif reel eksen ve $z=R \cdot e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi/3$ çeyrek daire kontürü üzerinden integral alınır. Kontürün içinde kalan tek kutup noktası $z=e^{i\pi/3}$ tür. Rezidü teoreminden $I+0+I'=2\pi i \text{Rez}(f, z_2)$. Burada $I' = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 \frac{e^{i\pi/3} dr}{1+r^3} = -e^{i2\pi/3} \int_0^R \frac{dr}{1+r^3}$. $r \rightarrow x$ ve $R \rightarrow \infty$ için $I' = -e^{2\pi i/3} I$, z_2 basit kutup için rezidü $\text{Rez}(f, z_2) = p(z_2)/q'(z_2) = 1/(1+z_2^3) \rightarrow \text{Rez}(f, z_2) = 1/3z_2^2 \rightarrow \text{Rez}\left(f, e^{i\pi/3}\right) = \frac{1}{3 \cdot (-e^{2\pi i/3})}$ olur. Buradan $I+0+(-e^{2\pi i/3})I=2\pi i[-1/3e^{2\pi i/3}] \rightarrow I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ sonucu elde edilir.

Çok Değerli Kompleks Fonksiyonlar:

Kompleks düzlemde $w=f(z)$ fonksiyonu her z değeri için birden fazla değere karşılık geliyorsa buna çok değerli fonksiyon denir. Örneğin $w=\log z$ ve $w=z^{1/n}$ fonksiyonları. Çok değerli fonksiyonlar tek değerli fonksiyonlar haline getirilerek (yaklaştırılarak), tek değerli fonksiyonlara ait özelliklerle incelenebilirler. Bu olanağı sağlayan yüzeylere (bu yüzeyler dal sayıları kadardır) Riemann yüzeyleri denir.

Örnek: $w=f(z)=\text{Arccosz}$ fonksiyonunun ∞ katlı bir çok değerli fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $w=\text{Arccosz} \rightarrow z=\cos w=(e^{iw}+e^{-iw})/2 \rightarrow e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0 \rightarrow$ çözümü $e^{iw}=z \pm (z^2-1)^{1/2}$ şeklindedir. $w=(1/i) \cdot \ln[z \pm (z^2-1)^{1/2}] \rightarrow w=\ln z$ tipinde çok değerli fonksiyon elde edilir. $0 \leq \theta_p < 2\pi$ aralığında $\rightarrow z=r \cdot e^{i\theta}=r \cdot e^{i(\theta_p+2k\pi)}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) Bu durumda $w=\ln z$, $z \neq 0$ için sonsuz değerli fonksiyon olur.

Bazı çok değerli fonksiyonların integralleri:

$G(x)$ çok değerli bir fonksiyon, $f(x)$ ise gerçel eksen üzerinde ancak basit kutbu bulunabilen bir fonksiyon ise; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \cdot dx$ ya da $\int_a^b f(x)g(x) \cdot dx$ tipindeki integraller rezidü teoremi yardımıyla hesaplanabilir.

Örnek: $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $f(z)=\ln z/(x^2+4)$ fonksiyonunun dallanma ve kutup noktaları; 0 ve $\pm 2i$ dir. $f(z)=\ln[g(z)]$ olmak üzere $g(z_0)=0$ yapan noktalar dallanma noktalarıdır. Rezidü içeride $2i$ için; $A_1 = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{\ln z}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{\ln(2i)}{4i}$, $2i=2 \cdot e^{i\pi/2} \rightarrow \ln(2i)=\ln(2 \cdot e^{i\pi/2})=\ln 2+(i\pi/2)$, $A_{-1} = \frac{\ln 2+(i\pi/2)}{4i} \rightarrow I = 2\pi i \left[\frac{\ln 2+(i\pi/2)}{4i} \right] = \frac{2\pi \ln 2 + i\pi^2}{4}$ olur. Reel kısım $\rightarrow I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx = \frac{\pi \ln 2}{4}$ olur.

Örnek: $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $F(z)=f(z) \cdot g(z)$ göz önüne alalım. Bunun kutup ve dallanma noktaları sırasıyla; $\pm i$ ve $-i$ dir. Kapalı çevre içinde kalan i kutbu için rezidü; $I = \oint \frac{\ln(z+i)}{z^2+1} dz + \oint \frac{\ln(z-i)}{z^2+1} dx$ (sağdaki terim dışta olup sıfırdır) $\rightarrow A_{-1} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{\ln(z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{\ln 2+(i\pi/2)}{2i} \rightarrow I = 2\pi i \left[\frac{\ln 2+(i\pi/2)}{2i} \right] = \pi \ln 2 + (\frac{i\pi^2}{2}) \rightarrow$ reel kısım $I=\pi \ln 2$ olur.

Örnek: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $I = \oint \frac{\sqrt{z} dz}{z^2+1} = 2\pi i A_{-1}^{(k)} \rightarrow F(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}$, pay kısmının tanımsız olduğu nokta (dallanma) 0 dir, kutup noktaları $\pm i$ dir.

Kutup noktalarının ikisi de kapalı çevrenin içinde kalır; $A_{-1}^{(1)} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{\sqrt{z}}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2\sqrt{i}} = \frac{1}{2} e^{-i\pi/4}$, burada $(i)^{1/2}=(e^{i\pi/2})^{1/2}$ dir, $A_{-1}^{(2)} = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{\sqrt{z}}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2\sqrt{i}} = -\frac{1}{2} e^{i\pi/4}$. Buradan $\oint \frac{\sqrt{z} dz}{z^2+1} 2\pi i \left[\frac{1}{2} e^{-i\pi/4} - \frac{1}{2} e^{i\pi/4} \right] = 2\pi \sin(\frac{\pi}{4})$ ve $C=C_1+C_2+C_3+C_4$ eğrisi boyunca $C_3=C_4=0$ olup, $I=(1/2)(2\pi \sin \pi/4)$ olur. Buradan sonuç $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ bulunur.

Alıştırılmalar:

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz. (Cevap: $(2\sin ka)/k$)

2) $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz. (Cevap: $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4}$)

3) $f(x)=e^{-a|x|}$ ($a>0$), fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz. (Cevap: $2a/(a^2+k^2)$)

4) $f(x)=e^{-a|x|}$ ($a>0$), $f'(x)$ fonksiyon türevinin Fourier dönüşümünü bulunuz. (Cevap: $2ak/(a^2+k^2)$)

5) $y(t) = A \sin(w_0 t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesaplayınız. (Cevap: $-iA\pi[\delta(w-w_0) - \delta(w+w_0)]$)

6) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz. (Cevap: $2/s^3 + 2/s^2 + 3/s$)

7) $f(x) = e^{2x} + 3 \ln x$ fonksiyonunu Laplace dönüşümünü bulunuz. (Cevap: $\frac{1}{s-2} - 3 \frac{(\gamma + \ln s)}{s}$)

8) $f(x) = 4 \sin 3x + 5 \cos 2x$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz. (Cevap: $12/(s^2+9) + 5s/(s^2+4)$)

9) $f(x) = x \sin 3x + e^{2x} \cos 3x$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayınız. (Cevap: $6s/(s^2+9)^2 + (s-2)/[(s-2)^2+9]$)

10) $f(x) = \sinh^2(3x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayınız. (Cevap: $18/s(s^2-36)$)

11) $f(x) = x^3 e^{-2x}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayınız. (Cevap: $6/(s+2)^4$)

12) $f(x) = x^n \cdot e^{-ax} \cdot \sin bx$ fonksiyonunu Laplace dönüşümünü bulunuz. (Cevap: $(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{b}{(s+a)^2 + b^2} \right]$)

13) $\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = t + 1$ diferansiyel denklemini $x(0)=4$ başlangıç koşulunda Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz. (Cevap: $x(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + \frac{15}{4}e^{-2t}$)

14) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + w^2x(t) = A\sin wt$ denklemini $x(0)=A$ ve $x'(0)=0$ başlangıç koşullarında laplace dönüşümüyle çözünüz. (Cevap: $x(t)=A.\cos wt + At.\sin wt$)

15) $F(s) = \frac{s^2+4}{(s+2)^2-9}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulunuz. (Cevap: $f(t) = \frac{2}{3}(e^t - e^{-5t})$)

16) $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$ fonksiyonunun $z=2$ noktasındaki Rezidüsünü hesaplayınız. (Cevap: $3/2$)

17) $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4}$ fonksiyonunu $z=0$ da Rezidüsünü bulunuz. (Cevap: $4/3$)

18) $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)(z^2+4)}$ fonksiyonunun kutup noktalarını bularak toplam rezidüsünü hesaplayınız. (Cevap: $(7-4i)/5$)

19) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ fonksiyonunu $z=0$ da Rezidüsünü hesaplayınız. (Cevap: 1)

20) $|z|=3/2$ çemberi üzerinde $I = \oint_C \frac{(z+1)dz}{z(z+1)(z-2)}$ integralini hesaplayınız. (Cevap: $-3\pi i$)

21)C eğrisi $|z|=5$ çemberi ise $\oint_C \frac{e^z}{\cosh z} dz$ integralini hesaplayınız. (Cevap: $8\pi i$)

22) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5+4\cos\theta} d\theta$ integralini hesaplayınız. (Cevap: $\pi/6$)

23) $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ integralini hesaplayınız. (Cevap: $\pi/4$)

BÖLÜM-5

DİFERANSİYEL DENKLEMLER:

X bağımsız değişkeni, bilinmeyen $y=f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun $y', y'', \dots, y^{(n)}$ türevleri arasındaki bir bağıntıya diferansiyel denklem denir. Böyle bir denklem sembolik olarak $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$ veya $F(x, y, dy/dx, d^2y/dx^2, \dots, d^n y/dx^n)=0$ şeklinde gösterilir. Tek bağımsız değişkenli denkleme adi diferansiyel denklem, çok bağımsız değişkenli denkleme kısmi diferansiyel (kısmi türevli) denklem denir. Örneğin; $(dy/dx)-y=\cos x$ (adi diferansiyel), $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} = Q(x, y)$ (kısmi türevli diferansiyel). Denklemden en yüksek türev derecesi diferansiyel denklemin mertebesidir.

1)BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER:

1)Değişkenlerine ayrılabilen tipte diferansiyel denklemler:

$M(x, y)dx + N(x, y)dy=0$ şeklindeki bir diferansiyel denklem $f(x)dx + g(y)dy=0$ şekline dönüştürülebiliyorsa, buna değişkenlere ayrılabilen tipte diferansiyel denklem denir. Bu durumda $\int f(x)dx + \int g(y)dy = c \rightarrow F(x) + G(y) = c$ şeklinde çözüm elde edilir.

Örnek: $(x+1)y \cdot dx + (y-1)x \cdot dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Tüm terimler $x \cdot y$ 'ye bölündüğünde; $\frac{x+1}{x} dx + \frac{y-1}{y} dy = 0$ elde edilir. Buradan $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx + \int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = c \rightarrow x + \ln x + y - \ln y = c$ olur.

2)Homojen tip diferansiyel denklemler:

Her x için $f(wx, wy)=w^n f(x, y)$ ise $f(x, y)$ fonksiyonu x ve y değişkenlerine göre n .dereceden homojen bir fonksiyondur. Sıfırıncı dereceden homojen de $f(x, y)=f(1, y/x)$ olur.

$M(x, y)dx + N(x, y)dy=0$ denkleminde $M(x, y)$, $N(x, y)$ fonksiyonları aynı dereceden homojen fonksiyonlar ise denklem homojen tipte diferansiyel denklemdir.

Örnek: $(x^2+y^2)dx - 2xydy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: (x^2+y^2) ve $-2xy$ 'nin dereceleri eşittir (2). Bu durumda denklem homojendir ve $y/x=u$ dönüşümü yaparız. $y=ux \rightarrow dy=u \cdot dx + x \cdot du \rightarrow (x^2+u^2x^2)dx-2x(ux)(udx+xdu)=0 \rightarrow \frac{1}{2x}dx + \frac{u}{u^2-1}du = 0 \rightarrow \int \frac{1}{2x}dx + \int \frac{u}{u^2-1}du = c \rightarrow \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(u^2-1) = c \rightarrow \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2-1\right) = c \rightarrow y=(x^2+kx)^{1/2}$

3) $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$ diferansiyel denklemi:

Burada $c_1=c_2=0$ ise denklem homojen tip olur. c_1 ve $c_2 \neq 0$ ise; $x=x_1+h$, $y=y_1+k$ seçilir. Bunlar denklemde yerine konup, $a_2/a_1=b_2/b_1=m$ ve $a_1x+b_1y=u$ dönüştürmesi yapılırsa $[(b_1-a_1m)u+b_1c_1-a_1c_1]dx+(mu+c_2)du=0$ elde edilir. Bu denklem değişkenlerine ayrılabilir.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = -2 \rightarrow x=x_1+h$, $y=y_1+k$ dönüşümü yapılamaz. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-1}{2(2x+y)+5}$ olduğundan $2x+y=u$ dönüştürmesi yapılırsa $2 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2$ olduğundan denklem; $\frac{du}{dx} - 2 = \frac{u-1}{2u+5} \rightarrow \frac{2u+5}{5u+9}du = dx \rightarrow \frac{2}{5}u + \frac{5}{27}\ln(5u+9) = x + c \rightarrow \frac{2}{5}(2x+y) + \frac{5}{27}\ln(10x+5y+9) = x + c$ bulunur.

4) Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler:

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ şeklindeki denkleme birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem denir. Denklemdeki $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları x 'in sürekli fonksiyonlarıdır. Denklemde $Q(x)=0$ ise denkleme ikinci tarafsız lineer denklem denir. Bu denklemin çözümü $y=u(x) \cdot v(x)$ şeklinde iki fonksiyonun çarpımıyla aranır. Denklemin genel çözümü;

$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + c \right]$ şeklindedir.

Örnek: $\frac{dy}{dx} + \cos x \cdot y = \sin 2x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $P(x)=\cos x$, $Q(x)=2\sin x \cdot \cos x$ dir. $y = e^{-\int \cos x \cdot dx} \left[\int 2\sin x \cdot \cos x \cdot e^{\int \cos x \cdot dx} \cdot dx + c \right] \rightarrow y = e^{-\sin x} \left[\int 2ue^u du + c \right] \rightarrow y = e^{-\sin x} [2e^{\sin x} (\sin x - 1) + c] \rightarrow y = 2\sin x - 2 + Ce^{-\sin x}$.

5) Bernoulli diferansiyel denklemi:

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ şeklindeki denkleme Bernoulli diferansiyel denklemi denir. Burada $n \neq 0$ ve 1 dir. Bu denklem $u=y^{1-n}$ dönüşümü yapılarak çözülür. Bu durumda denklem birinci mertebeden lineer diferansiyel denkleme dönüşür; $\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$

Örnek: $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $u=y^{1-2}=y^{-1}$ dönüşümü yapılırsa $\frac{du}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$ ve bunlar diferansiyel denklemde yerlerine konursa; $\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ elde edilir. Bu lineer diferansiyel denklemin çözümü; $u = e^{\int \frac{1}{x}dx} \left[\int \frac{-\ln x}{x} e^{\int \frac{1}{x}dx} \cdot dx + c \right] \rightarrow u = x \cdot \left[\int \frac{-\ln x}{x^2} dx + c \right] \rightarrow u = x \left[\frac{1}{x} (\ln x + 1) + c \right] \rightarrow \frac{1}{y} = \ln x + cx + 1$ olur.

6) Tam diferansiyel tipi denklemler:

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ denklemindeki $M(x,y)$, $N(x,y)$ fonksiyonları $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ bağıntısını sağlıyorlarsa bu denkleme tam diferansiyel tipi denklem denir. Genel çözümü $\int_a^x M(x,y)dx + \int_b^y N(a,y)dy = c$ şeklindedir.

Örnek: $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = \frac{2x}{y^3}$, $N(x,y) = \frac{y^2-3x^2}{y^4} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$ olduğundan tam diferansiyeldir. $u(x,y) = \int_a^x M(x,y)dx + \int_b^y N(a,y)dy \rightarrow u(x,y) = \int_a^x \frac{2x}{y^3}dx + \int_b^y \frac{y^2-3a^2}{y^4}dy = \frac{x^2}{y^3} - \frac{a^2}{y^3} - \frac{1}{y} + \frac{a^2}{y^3} + \frac{1}{b} - \frac{a^2}{b^3} = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + k$ bulunur.

7) İntegrasyon çarpanı:

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ denklemindeki $M(x,y)$, $N(x,y)$ fonksiyonları için $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olması durumunda diferansiyel denklemin sol tarafı $\mu(x,y)$ bir fonksiyonla çarpılarak tam diferansiyel tipine dönüştürülür. Bu $\mu(x,y)$ çarpanına integrasyon çarpanı denir. Bu durumda $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ den, $M \frac{\partial \log \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ olur. Bu genel haliyle $\mu(x,y)$ 'yi bulmak güç olabilmektedir. Özel

hallere giderek yalnız y veya yalnız x'e tabi bir integrasyon çarpanı kabul ederek μ 'yü belirlemek daha kolaydır. Eğer yalnız y'ye bağlı ise $\frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = f(y)$ ifadesinden integrasyon çarpanı bulunur ve denklem tam diferansiyel tipe dönüştürülür.

Not: Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem de $\mu = e^{\int p(x)dx}$ integral çarpanıdır ve $y = \frac{1}{\mu} [\int \mu \cdot Q(x) \cdot dx + c]$ olur.

Örnek: $(y+xy^2)dx - xdy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=y+xy^2$, $N(x,y)=-x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = f(y) \rightarrow \frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{1}{(y+xy^2)} (-1 - 1 - 2xy) = \frac{-2}{y} \rightarrow \log \mu = -2 \log y \rightarrow \mu = \frac{1}{y^2}$. Diferansiyel denklem $\left(x + \frac{1}{y}\right) dx - \left(\frac{x}{y^2}\right) dy = 0 \rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \mu \cdot N(x,y) \rightarrow \int \partial F(x,y) = \int \frac{-x}{y^2} dy \rightarrow F(x,y) = \frac{x}{y} + h(x) \rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \mu \cdot M(x,y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} + h(x) \right) = \left(x + \frac{1}{y}\right) \rightarrow \frac{1}{y} + \frac{\partial h(x)}{\partial x} = x + \frac{1}{y} \rightarrow h(x) = \frac{x^2}{2} + c \rightarrow F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + c \rightarrow y = -\frac{2x}{x^2+k}$ sonucu bulunur.

8) Clairaut diferansiyel denklemi:

$y = x \frac{dy}{dx} + w \left(\frac{dy}{dx} \right)$ şeklindeki denkleme Clairaut denklemi denir. Bu denklemi çözmek için $\frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılır ve denklem $y = xp + w(p)$ şeklini alır. Denklemin tekil çözümü $y = cx + w(c)$, genel çözümü ise bunun c'ye göre türevinden bulunur.

Örnek: $y = xy' + y'^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $y' \rightarrow c$ den dolayı denklemin genel çözümü; $y = cx + c - c^2$ dir. Tekil çözüm c'ye göre türev alınarak elde edilir; $x+1-2c=0$. Bu denklemden $c = \frac{1}{2}(x+1)$ bulunur. Bu ifade genel çözümde yerine konursa; $y = \frac{1}{4}(x+1)^2$ elde edilir.

9) Lagrange denklemi:

$y = x \cdot w(y') + q(y')$ şeklindeki bir denkleme Lagrange denklemi denir. Bu denklem de $y' = p$ dönüştürmesi ile çözülebilir. $\frac{dx}{dp} - x \frac{w'(p)}{p-w(p)} = \frac{q'(p)}{p-q(p)} \rightarrow \phi(x,y,c)=0$ şeklinde genel çözüme sahiptir.

Örnek: $y + xy' = y'^3$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $y' = p$ dönüşümü yapılırsa; $y + px = p^3$ olur. x'e göre türev alınıp p' çekilirse; $p' = \frac{2p}{3p^2-x} \rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = \frac{3p}{2}$ olur. Bu denklem lineer denklemdir ve çözümü $x = e^{-\int \frac{1}{2p} dp} \left[\int e^{\frac{1}{2p} dp} \frac{3p}{2} \cdot dp + c \right] \rightarrow x = p^{-1/2} \left[\int \frac{3}{2} p^{3/2} dp + c \right] \rightarrow x = \frac{3}{5} p^2 + c \cdot p^{-1/2}$ olur. $y + px = p^3$ ve $x = \frac{3}{5} p^2 + c \cdot p^{-1/2}$ genel çözümün parametrik denklemleridir. $P_0 = w(p_0) = -y'$ eşitliğini sağlayan $p_0 = 0$, verilen denklemden y' yerine yazıldığında; $y = 0$ olur ve bu bir tekil çözümdür.

2) DEĞİŞKENLERDEN BİRİNİ İÇERMİYEN İKİNCİ DERECEDEKİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER:

1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$ diferansiyel denklemi:

Bu denklemi çözmek için ard arda iki kez integral alınır.

Örnek: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x + 1 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\int d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \int (2x - 1) dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 - x + c_1 \rightarrow \int dy = \int (x^2 - x + c_1) dx \rightarrow y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$.

2) $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y)$ diferansiyel denklemi:

Bu denklemi çözmek için denklemin her iki tarafı $2 \frac{dy}{dx} \cdot dx$ ile çarpılır. Buradan $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \int 2f(y) \cdot dy + c = F(y) + c \rightarrow \frac{dy}{\sqrt{F(y)+c}} = dx \rightarrow y = w(x,c,k)$ şeklinde çözüm bulunur.

Örnek: $\frac{d^2 y}{dt^2} + w^2 y = 0$ harmonik salınımın diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $2 \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -w^2 y \cdot 2 \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = -2w^2 y \frac{dy}{dt} \rightarrow \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = -w^2 y^2 + c^2 \rightarrow \frac{dy}{\sqrt{c^2 - w^2 y^2}} = dt \rightarrow \frac{1}{w} \arcsin \left(\frac{wy}{c} \right) = t + \gamma \rightarrow y = \frac{c}{w} \sin(wt + \gamma)$

3) $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$ diferansiyel denklemi:

$dy/dx=p \rightarrow d^2y/dx^2=dp/dx$ ile denklem $dp/dx=f(x,p)$ denklemine dönüştürülerek çözüm yapılır.

Örnek: $(x+1)\frac{d^2y}{dx^2} = (x+2)\frac{dy}{dx}$ diferansiyel denkleminin $x=0$ için $\frac{dy}{dx} = 3$ ve $y=1$ olması koşulunda çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = p$ dönüşümü yapılırsa $\frac{dp}{p} = \frac{x+2}{x+1} dx = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx \rightarrow p = c(x+1)e^x$ bulunur. Buradan $y = c \int (x+1)e^x dx \rightarrow y = cxe^x + k$, sınır koşulları kullanıldığında $x=0$ için $3=c(0+1)e^0 \rightarrow c=3$ ve $1=3.x.e^0+k \rightarrow k=1$, budan da aranan çözüm $y = 3xe^x + 1$ şeklinde bulunur.

3) İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER VE SABİT KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER:

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$ şeklindeki denkleme n.mertebeden lineer diferansiyel denklem denir. $A_0y^{(n)} + A_1y^{(n-1)} + \dots + A_ny = f(x)$ şeklindeki denkleme de n.mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem denir. Buradaki $f(x)$ 'e denklemin ikinci tarafı denir.

1) $A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0$ denkleminin çözümü:

Denklemden $\frac{d^2}{dx^2} \rightarrow r^2, \frac{d}{dx} \rightarrow r, y \rightarrow 1$ getirilir. Bu durumda $A.r^2+B.r+C=0$ den kökler $r_{1,2}$ bulunur.

1) $B^2-4AC>0$ ise çözüm $y = K_1e^{r_1x} + K_2e^{r_2x}$ şeklindedir.

2) $B^2-4AC=0$ ise çözüm $y = e^{rx}(K_1x + K_2)$ şeklindedir.

3) $B^2-4AC<0$ ise kökler $r_{1,2}=a\pm bi$ olup çözüm $y = e^{ax}(K_1\cos bx + K_2\sin bx)$ şeklindedir.

Örnek: $y''-2y'-3y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^2-2r-3=0 \rightarrow r_1=-1$ ve $r_2=3$ olur. Çözüm $y = K_1e^{-x} + K_2e^{3x}$ olur.

Örnek: $y''-4y'+4y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^2-4r+4=0 \rightarrow r_1=r_2=2$ olur. Çözüm $y = e^{2x}(K_1x + K_2)$ olur.

Örnek: $y''+2y'+5y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^2+2r+5=0 \rightarrow r_1=-1+2i$ ve $r_2=-1-2i$ olur. Çözüm $y = e^{-x}(K_1\cos 2x + K_2\sin 2x)$ olur.

2) $A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = f(x)$ denkleminin çözümü:

Bu diferansiyel denklem hem birinci hem de ikinci taraflıdır. Birinci tarafın çözümü y_1 , ikinci tarafın çözümü y_2 olmak üzere (özel çözüm), genel çözüm $y=y_1+y_2$ şeklindedir. y_2 özel çözüm $f(x)$ fonksiyonunun karakterine göre aranır.

1) $f(x)$ bir polinom fonksiyon ise ($\dots px^2+qx+m$ gibi), bu durumda $y_2=\dots ax^2+bx+c$ kabul edilip diferansiyel denklemde yerine konur ve a, b,c katsayıları bulunur.

Örnek: $y''-2y'+y=3x^2+x-4$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Sol taraf $r^2-2r+1=0 \rightarrow r_1=r_2=1 \rightarrow y_1 = e^x(K_1x + K_2)$ olur. Sağ taraf $y_2=ax^2+bx+c$ alınıp türevleri sol tarafta yerine konulduğunda $(2a)-2(2ax+b)+(ax^2+bx+c)=3x^2+x-4 \rightarrow ax^2+(-4a+b)x+(2a-2b+c)=3x^2+x-4 \rightarrow a=3, b=13, c=16 \rightarrow y_2=3x^2+13x+16 \rightarrow y=e^x(K_1x+K_2)+3x^2+13x+16$ şeklinde gelen çözüm bulunur.

2) $f(x)=A.e^{kx}$ ise $y_2=B.e^{px}$ şeklinde çözüm denenir ($k \neq r_{1,2}$ olmalıdır). Eğer $r_1=k, r_2 \neq k$ ise bu durumda $y_2=Mx.e^{kx}$ şeklinde olur. Eğer $r_1=r_2=k$ ise $y_2=Mx^2e^{kx}$ şeklinde olur.

Örnek: $y''+4y'+8y=e^{-2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Sol taraf için $r^2+2r+8=0 \rightarrow r_1=-2+2i, r_2=-2-2i \rightarrow y_1=e^{-2x}(K_1\cos 2x+K_2\sin 2x)$ olur. Sağ taraf için $y_2=K.e^{-2x}$ şeklinde seçilen fonksiyonu ve türevlerini diferansiyel denklemde yerine yazdığımızda $e^{-2x}[4K-8K+8K]=e^{-2x} \rightarrow K=1/4 \rightarrow y_2=(1/4).e^{-2x}$ olur.

Örnek: $y''-5y'+6y=4e^{2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Sol taraf için çözüm $r^2-5r+6=0 \rightarrow r_1=2$ ve $r_2=3 \rightarrow y_1=K_1e^{2x}+K_2e^{3x}$ olur. Sağ taraf için $r_1=p=2, r_2 \neq p \rightarrow y_2=M.x.e^{2x}$ şeklinde olmalıdır. Bu fonksiyonun türevleri ve kendisi diferansiyel denklemde yerine konulduğunda; $e^{2x}(4M + 4Mx) - 5e^{2x}(M + 2Mx) + 6Mxe^{2x} = 4e^{2x} \rightarrow M=-4 \rightarrow y_2=-4xe^{2x}$ olur. Genel çözüm $y=K_1e^{2x}+K_2e^{3x}-4xe^{2x}$ şeklinde bulunur.

3) $f(x)=M\sin px+N\cos px$ şeklinde ise y_2 özel çözümü için $y_2=D\sin px+E\cos px$ şeklinde olur. Ancak $Ay''+By'+Cy=M\sin px+N\cos px$ de $B=0$ ve $C=A.p^2$ ise o zaman özel çözüm $y_2=x(D\sin px+E\cos px)$ şeklinde olur.

Örnek: $y''+y'-2y=4\sin 2x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: İkinci tarafsız denklemin çözümü $r^2+r-2=0 \rightarrow r_1=-2$ ve $r_2=1 \rightarrow y_1=K_1e^{-2x}+K_2e^x$ dir. İkinci taraflı denklemin çözümü $B=1 \neq 0$, $C=Ap^2=-2 \neq 1.2^2 \rightarrow y_2=D\sin 2x+E\cos 2x$ şeklinde olmalı. Bu denklem ve türevleri diferansiyel denklemde yerlerine konduğunda ($y'=2D\cos 2x-2E\sin 2x$, $y''=-4D\sin 2x-4E\cos 2x$) $\rightarrow -4D\sin 2x-4E\cos 2x+2D\cos 2x-2E\sin 2x-2D\sin 2x-2E\cos 2x=4\sin 2x \rightarrow (-6D-2E)\sin 2x+(-6E+2D)\cos 2x=4\sin 2x \rightarrow D=-3/5$, $E=-1/5 \rightarrow y_2 = \frac{-3}{5}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x$ şeklinde özel çözümü bulunur.

Örnek: $y''+4y=3\sin 2x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: ikinci tarafsız denklemin çözümü $r_{1,2}=\pm 2i \rightarrow y_1=K_1\sin 2x+K_2\cos 2x$ dir. İkinci taraflı denklemin özel çözümü; $B=0$, $C=Ap^2 \rightarrow B=0$, $4=1.2^2$ olduğundan $y_2=x(D\sin 2x+E\cos 2x)$ şeklindedir. Buradan $y_2'=(D\sin 2x+E\cos 2x)+x(2D\cos 2x-2E\sin 2x)$, $y_2''=2D\cos 2x-2E\sin 2x+(2D\cos 2x-2E\sin 2x)+x(-4D\sin 2x-4E\cos 2x)$ ifadeleri diferansiyel denklemde yerine konulup D ve E katsayıları bulunur: $D=0$ ve $E=-3/4$. Özel çözüm $y_2=(-3/4)x\cos 2x$ olur.

4)f(x)= $e^{ax}R(x)$ şeklinde ise özel çözüm için $y_2=Z.e^{ax}$ şeklinde fonksiyon alınıp, Z değişken kabul edilerek, denklemde yerine konulup Z belirlenir.

Örnek: $y''+4y'+4y=x^2e^{3x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^2+4r+4=0 \rightarrow r_1=r_2=-2 \rightarrow y_1=(K_1+xK_2)e^{-2x}$ olur. $y_2=Z.e^{3x}$ dönüştürmesi yapılırsa $Z''+10Z'+25Z=x^2$ elde edilir. Bu denklemi sağlayan $Z=ax^2+bx+c$ şeklinde olmalıdır. $Z'=2ax+b$, $Z''=2a \rightarrow 25ax^2+(20a+25b)x+(2a+10b+25c)=x^2 \rightarrow a=1/25$, $b=-4/125$, $c=6/625 \rightarrow Z=(1/625)(25x^2-20x+6) \rightarrow y_2 = \frac{e^{3x}}{625}(25x^2 - 20x + 6)$ olur.

Örnek: $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^2-4=0 \rightarrow r_1=2$, $r_2=-2 \rightarrow y_1=K_1e^{2x}+K_2e^{-2x}$. İkinci taraflı denklemin çözümü $y_2=e^{2x}.Z = e^{2x}(A\sin 2x+B\cos 2x)$ tipinde olmalıdır. Bu denklem ve ikinci türevi diferansiyel denklemde yerine konularak A ve B sabitleri bulunursa; $A=-1/20$, $B=-1/10$ bulunur. Bu durumda genel çözüm $y = K_1e^{2x} + K_2e^{-2x} - \frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x)$ şeklinde olur.

5)f(x) birkaç fonksiyonun toplamı şeklinde ise, özel çözüm f(x)'i oluşturan fonksiyonların her birine karşılık gelen özel çözümlerin toplamına eşittir.

Örnek: $y''+y'-2y=x+\sin x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: İkinci tarafsız denklemin çözümü $r^2+r-2=0 \rightarrow r_1=1$, $r_2=-2 \rightarrow y_1=K_1e^x+K_2e^{-2x}$ şeklinde olur. İkinci taraflı denklemin özel çözümleri $y_{21}=Ax^2+Bx+C$, $y_{22}=D\sin x+E\cos x$ şeklindedir. y_{11} ve türevleri diferansiyel denklemde yerlerine konursa (sağda sadece x alarak); $A=0$, $B=-1/2$, $C=-1/4 \rightarrow y_{21}=(-1/2)x-(1/4)$ bulunur. y_{22} ve türevleri diferansiyel denklemde yerlerine konursa (sağda sadece $\sin x$ alarak); $D=-3/10$, $E=-1/10 \rightarrow y_{22}=(-1/10)(3\sin x+\cos x)$ bulunur. Bu durumda genel çözüm; $y=y_1+y_{21}+y_{22}$ olarak yazılır.

3)Sabitin Değişim Kuralı (Lagrange kuralı):

İkinci tarafsız denklemin genel çözümü biliniyorsa, ikinci taraflı denklemin çözümü integral işlemleriyle elde edilebilir. $Ay''+By'+Cy=f(x)$ denkleminin ikinci tarafsızının genel çözümü $y=k_1y_1+k_2y_2$, bunun türevinden (hem k hem y değişken kabul edilir), $k_1'y_1+k_2'y_2=0$ bütünler şartı seçilerek, $Ak_1'y_1+Bk_2'y_2=f(x)$ elde edilir. Bu denklem sisteminden k_1' ve k_2' çözülerek integralleri alınır ve $y=k_1y_1+k_2y_2$ ikinci taraflı denklemin genel çözümü bulunur.

Örnek: $y''+y=\tan x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: ikinci tarafsız denklemin çözümü $r^2+1=0 \rightarrow r=\pm i \rightarrow y=k_1\sin x+k_2\cos x$ şeklindedir. İkinci taraflı denklemin çözümü için bunun türevlerini alıp diferansiyel denklemde yerine koyarak k_1' ve k_2' nü buluruz. Bulunan k' lerin integrallerinden çözüm bulunur. $y'=k_1\cos x-k_2\sin x+k_1'\sin x+k_2'\cos x \rightarrow k_1'\sin x+k_2'\cos x=0$ seçilirse $y'=k_1\cos x-k_2\sin x$ olur. $y''=-k_1\sin x-k_2\cos x+k_1'\cos x-k_2'\sin x$, bunlar denklemde yerlerine konduğunda $k_1'\cos x-k_2'\sin x=\tan x$ elde edilir. K' leri içeren iki denklemin ortak çözümünden $k_1'=\sin x$, $k_2'=-\sin^2 x/\cos x=\cos x-\sec x$; buradan integral alınarak $k_1=-\cos x+C_1$, $k_2=\sin x-\log(\sec x+\tan x)+C_2$ bulunur. Bu durumda genel çözüm $y=C_1\sin x+C_2\cos x-\cos.\log(\sec x+\tan x)$ olur.

4) n.MERTEBEDEN LİNEER VE SABİT KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER:

1)n.mertebeden lineer ve sabit katsayılı ikinci tarafsız diferansiyel denklemler:

$A_0y^{(n)}+A_1y^{(n-1)}+A_2y^{(n-2)}+\dots+A_{n-1}y^{(1)}+A_ny=0$ diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi $A_0r^n+A_1r^{n-1}+\dots+A_{n-1}r+A_n=0$ şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri çözümü belirler.

Örnek: $y''''-y''-4y'+4y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^3-r^2-4r+4=0 \rightarrow r_1=1$, $r_2=-2$, $r_3=2 \rightarrow y=K_1e^x+K_2e^{-2x}+K_3e^{2x}$ olur.

Örnek: $y^{(4)}+6y^{(3)}+5y^{(2)}-24y^{(1)}-36=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^4+6r^3+5r^2-24r-36=0 \rightarrow (r+3)^2(r^2-4)=0 \rightarrow r_1=r_2=-3, r_3=2, r_4=-2 \rightarrow y=(K_1+K_2x)e^{-3x}+K_3e^{2x}+K_4e^{-2x}$ olur.

Örnek: $y^{(4)}-4y^{(3)}+14y^{(2)}-20y^{(1)}+25y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^4-4r^3+14r^2-20r+25=0 \rightarrow (r^2-2r+5)^2=0 \rightarrow r_{1,2}=1+2i, r_{3,4}=1-2i \rightarrow y=e^x [(K_1+K_2x)\sin 2x+(K_3+K_4x)\cos 2x]$ olur.

2)n.mertebeden lineer ve sabit katsayılı ikinci taraflı diferansiyel denklemler:

a) $f(x)=B_0x^p+B_1x^{p-1}+\dots+B_p$ ise $y_2=C_0x^p+C_1x^{p-1}+\dots+C_p$, ancak r^m karakteristik denklemin çarpanı, yani $r=0$ karakteristik denklemin m katlı bir kökü ise $y_2=x^m(C_0x^p+C_1x^{p-1}+\dots+C_p)$ olur.

b) $f(x)=D.e^{ax}$ ise $y_2=Ke^{ax}$, ancak $(r-a)^m$ karakteristik denklemin bir çarpanı, yani $r=a$ karakteristik denklemin m katlı bir kökü ise, $y_2=Kx^me^{ax}$ olur.

c) $f(x)=M\sin px+N\cos px$ şeklinde ise (bunların sadece biri de olabilir), $y_2=Asinpx+Bcospx$, ancak $(r^2+p^2)^m$ karakteristik denklemin bir çarpanı ise $y_2=x^m(Asinpx+Bcospx)$ olur.

d) $f(x)=e^{ax}\phi(x)$ ise, $y=Z.e^{ax}$ dönüştürmesi yapılır, sonra Z bilinmeyen kabul edilir ve Z' 'ye bağlı denklem çözülür.

e) $f(x)$ birkaç fonksiyonun toplamı şeklinde ise; her fonksiyon ayrı ayrı alınarak özel çözüm bulunur, sonra bulunanlar toplanır.

Örnek: $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=x^2+x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^4+2r^2+1=0 \rightarrow (r^2+1)^2=0 \rightarrow r=\pm i$ (iki katlı) $\rightarrow y_1=(C_1x+C_2)(\sin x+(C_3x+C_4)\cos x)$ olur.

$y_2=ax^2+bx+c$ diferansiyel denklemde yerine konulup a, b, c katsayıları bulunur. $a=1, b=1, c=-4 \rightarrow y_2=x^2+x-4$ olur.

Örnek: $y''''-2y'''-5y''+6y'=e^{3x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^3-2r^2-5r+6=0 \rightarrow (r-1)(r-3)(r+2)=0 \rightarrow r_1=1, r_2=3, r_3=-2 \rightarrow y_1=C_1e^x+C_2e^{3x}+C_3e^{-2x}$ olur.

$e^{ax}=e^{3x}$ de $r_2=3=a$ karakteristik denklemin bir kökü olduğundan özel çözüm $y_2=Kxe^{3x}$ şeklindedir. Bu ifade (y_2) ve türevleri diferansiyel denklemde yerine konularak $K=1/10$ bulunur. Buradan $y_2=(1/10)xe^{3x}$ bulunur. Genel çözüm $y=y_1+y_2$ dir.

Örnek: $y^{(4)}+4y^{(3)}=4\cos 4x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^4+4r^3=0 \rightarrow r^3(r+4)=0 \rightarrow r_1=0$ (üç katlı), $r_2=-4 \rightarrow y_1=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{0x}+e^{-4x}$ olur.

$Y_2=Asin4x+Bcos4x$ fonksiyonunun türevleri diferansiyel denklemde yerlerine konup A ve B bulunur. $A=-1/128, B=1/128 \rightarrow y_2=(1/128)(\cos 4x-\sin 4x)$ bulunur. Genel çözüm $y=y_1+y_2$ dir.

n.mertebeden lineer diferansiyel denklemlerde sabitin değişimi kuralı (Lagrange kuralı):

$A_0y^{(n)}+A_1y^{(n-1)}+\dots+A_{n-1}y^{(1)}+A_ny=f(x)$ diferansiyel denkleminin ikini tarafsız kısmının çözümü $y=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n$ şeklinde olsun. Y ve y' 'nin türevleri c' 'ler ve y_n ler değişken kabul edilerek alınır ve diferansiyel denklemde yerlerine konulur. Denklemi sağlama şartları uygulanır ve integral işlemleri yardımıyla c' 'ler hesaplanır.

Örnek: $y^{(3)}+y^{(1)}=\operatorname{cosec} x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^3+r=0 \rightarrow r_1=0, r_2=i, r_3=-i \rightarrow y=C_1+C_2\sin x+C_3\cos x$ dir. y' 'nin türevleri alınıp (c ler de değişken kabul edilir), c' 'nin türevi olan terimler sıfıra, diferansiyel denklemde yerine konulan kısımda $\operatorname{cosec} x$ 'e eşit olmalıdır. Bu durumda $c_1'+c_2'\sin x+c_3'\cos x=0$, $c_2'\cos x-c_3'\sin x=0$, $-c_2'\sin x-c_3'\cos x=\operatorname{cosec} x$ denklem sistemi elde edilir. Buradan $c_1'=\operatorname{cosec} x, c_2'=-1, c_3'=-\cot x$; bunların integrallerinden $c_1=\log(\operatorname{cosec} x-\cot x)+K_1, c_2=-x+K_2, c_3=-\log \sin x+K_3$ elde edilir. Bu durumda çözüm; $y=K_1+K_2\sin x+K_3\cos x+\log(\operatorname{cosec} x-\cot x)-\cos x.\log \sin x-x\sin x$ olur.

5) DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER:

Euler (veya Cauchy) diferansiyel denklemi:

$A_0x^n \frac{d^n}{dx^n}y + A_1x^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \dots + A_{n-1}x \frac{d}{dx}y + A_ny = f(x)$ şeklindeki lineer denkleme Euler denklemi denir. Bu denkleme $x=e^t$ dönüştürmesi yapılırsa denklem sabit katsayılı lineer denkleme dönüşür. $D_x=d/dx, D_t=d/dt$ türetme operatörleri olup, $x D_x y = D_t y, x^2 D_x^2 y = (D_t^2 - D_t)y = D_t(D_t-1)y, \dots$ den $x^k D_x^k y = D_t(D_t-1)(D_t-2)\dots(D_t-k+1)y$ formülü elde edilir. Bu formülle bulunan terimler diferansiyel denklemde yerlerine konduğunda denklem sabit katsayılı denkleme ve $f(e^t)$ ye dönüşmüş olur.

Örnek: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 5y = x^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $x=e^t$ dönüştürmesi yapılırsa; $[D_t(D_t-1)(D_t-2) + 5D_t(D_t-1) + 5D_t]y = e^{2t}$ olur. Buradan $(D_t^3+2D_t^2+2D_t)y=e^{2t} \rightarrow r(r^2+2r+2)=0 \rightarrow r_1=0, r_2=+2i, r_3=-2i \rightarrow y_1(t)=K_1+K_2\sin 2t+K_3\cos 2t; y_2(t)=C.e^{2t} \rightarrow$ (denklemde yerine konduğunda) $C=1/18 \rightarrow y_2(t)=(1/18)e^{2t}$. Burada $t=\ln x$ çözümlerde yerlerine konduğunda; $y = K_1 + K_2 \sin(\ln x) + K_3 \cos(\ln x) + \frac{1}{18}x^2$ bulunur.

6) DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ:

X bağımsız değişkeni, x in bilinmeyen $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların çeşitli dereceden türevlerini içeren; $f_1(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_n, y_n', y_n'', \dots) = 0, f_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_n, y_n', y_n'', \dots) = 0, \dots, f_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_n, y_n', y_n'', \dots) = 0$ şeklindeki n denklemden oluşan bir sisteme adi diferansiyel denklem sistemi denir. Bu sistemde bilinmeyen fonksiyon sayısı kadar denklem vardır. bir denklemde, denklem sayısı bilinmeyen fonksiyonların sayısına eşit ve sistemin her denklemi bilinmeyen fonksiyonlardan birinin en büyük dereceli türevine göre çözülmüşse sisteme, kanonik sistem denir.

Özellikleri: 1)denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olmalı, 2)Denklemlerden biri bilinmeyen fonksiyonlardan birinin, sistemde mevcut en yüksek dereceli türevine göre çözülmüş olmalı, 3)Birinci taraftaki türevler ikinci taraflarda bulunmayacak.

1)Asal integrallerin hesabı:

$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \dots, \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ normal sisteminden $dx = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n}$ veya daha genel olarak $\frac{dx}{X(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dy_1}{Y_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{Y_n(x, y_1, \dots, y_n)}$ olarak yazılabilir. Böyle sistemleri çözmek için genelde kural yoktur. $Y_1 dx = X dy_1, \dots, Y_n dy_n = X_n dx$ denklemlerinden hepsi veya birkaç tanesi çözülmesi yolu ile sonuca gidilir. Bu denklemlerin hiç biri çözülemiyorsa $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ nin $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ gibi n+1 fonksiyonu aranır: $\mu_0 X + \mu_1 Y_1 + \dots + \mu_n Y_n = 0$ ve $\mu_0 dx + \mu_1 dy_1 + \dots + \mu_n dy_n = dF = 0$.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2}, \frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}$ denklem sisteminin asal integrallerini bulunuz.

Çözüm: $\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \rightarrow ydy - zdz = 0 \rightarrow y^2 - z^2 = C_1 \rightarrow \frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy - dz}{z - y} = -\frac{d(z-y)}{z-y} \rightarrow dx = -(z-y)d(z-y) \rightarrow x + (1/2)(z-y)^2 = C_2$ olur.

2)Normal sistemin çözümü:

$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \dots, \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ normal sisteminde, türevler ile bir denklem türetilir, oradan bulunan çözüm diğer denklemlerde yerine konularak sonuca gidilir.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = x - 2y - z$ ve $\frac{dz}{dx} = -4y + z + e^{-x}$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: İlk denklem x'e göre türevi alınır; $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}$ ve dz/dx yerine ikinci denklemdeki karşılığı yazılırsa, $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2\frac{dy}{dx} + 4y - z - e^{-x}$ elde edilir. İlk denklemden z'yi çekip burada yerine koyarsak $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = -x + 1 - e^{-x}$ elde edilir. Bu denklemin çözümü $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{6}x - \frac{5}{36} + \frac{1}{6}e^{-x}$, y'nin bu ifadesi birinci denklemde yerine konularak z çekilirse, $z = c_1 e^{-3x} - 4c_2 e^{2x} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{6}e^{-x}$ bulunur. y ve z'nin bulunan ifadeleri sistemin genel çözümüdür.

Örnek: $2y' = z^2$ ve $y = z + xz'$ olarak verilen denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: İkinci denklemin türevini alıp birinci denklemde yerine koyarsak; $y' = 2z' + xz'' \rightarrow 2xz'' = z'(z' - 4)$ olur. $z' = p$ dersek $2xp' + 4p = p^2$ olur. Bu bir Bernoulli denklemdir. Çözüm $z = \frac{2}{\sqrt{c_1}} \arctan 2\sqrt{c_1}x + c_2$ ve $y = \frac{2}{\sqrt{c_1}} \arctan 2\sqrt{c_1}x + c_2 + \frac{4x}{1+4c_1x^2}$ olur.

3)Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü:

$P_{11}(D)y_1 + P_{12}(D)y_2 + \dots + P_{1n}(D)y_n = f_1(x), P_{21}(D)y_1 + P_{22}(D)y_2 + \dots + P_{2n}(D)y_n = f_2(x), \dots, P_{n1}(D)y_1 + P_{n2}(D)y_2 + \dots + P_{nn}(D)y_n = f_n(x)$ denklem sistemi $D = d/dx$ türetme operatörlerinin fonksiyonlarıdır. Bu sistemlerde $y_1, y_2, \dots, y_n$ ler; $\Delta = \begin{bmatrix} P_{11}(D) & \dots & P_{1n}(D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(D) & \dots & P_{nn}(D) \end{bmatrix} \neq 0$ determinant ile çözülebilirler.

Örnek: $2(D-2)y_1 + (D-1)y_2 = e^x$ ve $(D+3)y_1 + y_2 = 0$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 2(D-2) & (D-1) \\ (D+3) & 1 \end{vmatrix} = -(D^2 + 1) \rightarrow \begin{vmatrix} 2(D-2) & (D-1) \\ (D+3) & 1 \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} e^x & (D-1) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ve $\begin{vmatrix} 2(D-2) & (D-1) \\ (D+3) & 1 \end{vmatrix} y_2 = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^x \\ (D+3) & 0 \end{vmatrix} \rightarrow (D^2 + 1)y_1 = -e^x$ ve $(D^2 + 1)y_2 = 4e^x \rightarrow y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{e^x}{2}$ ve $y_2 = c_3 \cos x + c_4 \sin x + 4e^x$ olur. Burada c_3 ve c_4, c_1 ve c_2 tütünden yazılabilir. Bu durumda y_1 ve y_2 ifadeleri denklem sisteminin ikincisinde yerine konularsa; $c_3 = -(3c_1 + c_2)$ ve $c_4 = c_1 - 3c_2$ olur.

4)Lineer ve sabit katsayılı bir normal diferansiyel denklem sisteminin matrisler yardımıyla çözümü:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t)$$

Şeklindeki sistem, sabit katsayılı lineer ve homojen olmayan normal bir sistemdir. Bu sistemde $f_1(t)=f_2(t)=\dots=f_n(t)=0$ ise sistem, homojen sistem olur. Homojen olmayan lineer sistemin genel çözümünü bulmak için, öncelikle homojen sistemin genel çözümü bulunur. Sonra homojen olmayan sistemin bir özel çözümü aranır ve bunlar toplanır.

$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + f_i(t)$ veya matrisler şeklinde yazılabilir. Sistem $\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$ matrisleri içeren diferansiyel denklem, sistem homojen ise $\frac{dx_i}{dt} - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ veya $\frac{dx}{dt} - Ax = 0$ şeklini alır. Bu sistemin çözümü $\sum_{k=1}^m c_k x^{(k)}(t)$ şeklinde yazılabilir.

Homojen olmayan sistemin genel çözümü $x(t) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^m c_k x^{(k)}(t)$ şeklinde olur. Homojen denklem sisteminde $x_1 = \alpha_1 e^{kt}$, $x_2 = \alpha_2 e^{kt}$, ..., $x_n = \alpha_n e^{kt}$ şeklinde aranan özel çözümler denklemlerde yerine konulup denklemler sıfıra eşitlenir. Bu

durumda elde edilen denklem sisteminin katsayılar determinanı $\Delta(k) = \begin{bmatrix} a_{11} - k & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - k \end{bmatrix}$ dır. k, bu determinanı sıfır

yapmıyorsa sistemin ancak $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ şeklinde aşıkaz çözümleri olur; $x_1(t)=x_2(t)=\dots=x_n(t)=0$. Sistemin aşıkaz olmayan çözümlerini elde etmek için k'yı $\Delta(k) = 0$ olacak şekilde seçmeliyiz. Bu durumda k denklemin karakteristik kökleri olur.

Örnek: $\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2$ ve $\frac{dx_2}{dt} = x_2 - 2x_1$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: $x_1 = \alpha_1 e^{kt}$ ve $x_2 = \alpha_2 e^{kt}$ olsun. Bunların türevleri alınıp denklemlerde yerlerine konursa; $k\alpha_1 e^{kt} = \alpha_1 e^{kt} - 2\alpha_2 e^{kt}$ ve $k\alpha_2 e^{kt} = \alpha_2 e^{kt} - 2\alpha_1 e^{kt} \rightarrow (1-k)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$ ve $-2\alpha_1 + (1-k)\alpha_2 = 0$ elde edilir. Bu sistemin karakteristik denklemini, $\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ -2 & 1-k \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 3 = 0$ olur. Buradan $k_1=3$ ve $k_2=-1$ olur. $k=k_1=3$ denklemlerde yerlerine konularak $\alpha_1 = -\alpha_2$ bulunur. Burada $\alpha_1=1$ ise $\alpha_2=-1$ olur ve buna göre çözümler $x_1 = e^{3t}$, $x_2 = -e^{3t}$ olur. $k=k_2=-1$ için $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ve buradan çözümler $x_1 = e^{-t}$, $x_2 = e^{-t}$ olur. Buradan genel çözüm $x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$, $x_2 = -c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$ veya $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklinde olur.

Örnek: $\frac{dx}{dt} = -5x + 5y + 7z$, $\frac{dy}{dt} = -2x + 2y + 3z$, $\frac{dz}{dt} = -4x + 5y + 4z$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: Bu sistem matrisler yardımıyla $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \end{bmatrix} X$ şeklinde yazılır ve $x = Ae^{kt}$, $y = Be^{kt}$, $z = Ce^{kt}$ alınırsa; $(-5-$

$k)A + 5B + 7C = 0$, $-2A + (2-k)B + 3C = 0$, $-4A + 5B + (4-k)C = 0$ denklemleri elde edilir. Karakteristik denklem ve kökleri

$\begin{vmatrix} -5-k & 5 & 7 \\ -2 & 2-k & 3 \\ -4 & 5 & 4-k \end{vmatrix} = k^3 - k^2 + k - 1 = (k-1)(k^2 + 1) = 0 \rightarrow k_1=1, k_2=i, k_3=-i$ şeklinde elde edilir. $K=1$ için $A=2B$

bulunur. $B=1$ seçilirse $A=2$, $B=1$, $C=1$ ve çözümler; $x=2e^t$, $y=e^t$, $z=e^t$ olur. $k_2=i$ seçilirse $A=1+7i$, $B=1+3i$, $C=-1+3i$ ve çözümler; $x=(1+7i)e^{it}=(1+7i)(\cos t + i \sin t)$, $y=(1+3i)(\cos t + i \sin t)$, $z=(-1+3i)(\cos t + i \sin t)$ olur. $k_3=-i$ seçilirse $A=1-7i$, $B=1-3i$, $C=-1-3i$ ve çözümler; $x=(1-7i)e^{-it}=(1-7i)(\cos t - i \sin t)$, $y=(1-3i)(\cos t - i \sin t)$, $z=(-1-3i)(\cos t - i \sin t)$ olur. Buna göre sistemin genel çözümü; $X =$

$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + (c_2 + c_3) \begin{bmatrix} \cos t - 7 \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -\cos t - 3 \sin t \end{bmatrix} + (c_2 - c_3) i \begin{bmatrix} 7 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix}$ olur.

7) KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER:

1)Özel şekillerdeki kısmi türevli denklemler:

a) $\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} + \alpha^2 z(x,y) = 0$ denkleminin çözümü:

$r^2 + \alpha^2 = 0 \rightarrow r = \pm \alpha i$ ve bu denklemin genel çözümü $z = \varphi_1(y) \cos \alpha x + \varphi_2(y) \sin \alpha x$ şeklinde x ve y'ye bağlı olacaktır. Buradaki $\varphi(y)$ 'ler keyfî fonksiyonlardır.

b) $\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} + P(x,y) \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = Q(x,y)$ denkleminin çözümü:

$\frac{\partial z}{\partial x} = p$ dönüştürmesi yapıldığında $\frac{\partial p}{\partial x} + P(x,y)p = Q(x,y)$ olur. Burada x bağımsız değişken ve y parametre olarak kabul edildiğinde, denklem birinci dereceden lineer diferansiyel denklem olur. Bu durumda genel çözüm; $z = \int e^{-\int P dx} \left[\int e^{\int P dx} Q dx + \alpha_1(y) \right] dx + \alpha_2(y)$ şeklinde olur.

c) $\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} + P(x,y) \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = Q(x,y)$ denkleminin çözümü:

$\frac{\partial z}{\partial x} = p$ dönüştürmesi yapıldığında $\frac{\partial p}{\partial y} + P(x, y)p = Q(x, y)$ olur. Burada, y bağımsız değişken ve x parametre olarak kabul edildiğinde, denklem birinci dereceden lineer diferansiyel denklem olur. Bu durumda genel çözüm; $z = \int e^{-\int P dy} \left[\int e^{\int P dy} Q dy + \alpha_1(x) \right] dx + \alpha_2(y)$ şeklinde olur.

d) $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} + P(y) \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + Q(y)z(x, y) = 0$ denkleminin çözümü:

x bağımsız değişken ve y parametre olarak kabul edildiğinde denklem, birinci dereceden sabit katsayılı ikinci tarafsız diferansiyel denklem olur. $r^2 + P(y)r + Q(y) = 0$ 'nin kökleri $r_1(y)$ ve $r_2(y)$ ise genel çözüm $z = \alpha_1(y)e^{r_1(y)x} + \alpha_2(y)e^{r_2(y)x}$ şeklinde olur.

2) Birinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemler:

$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$ şeklindeki denklemlerdir. Bu denklem $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ türevlerine göre lineerdir. Denklemin yardımcı sistemi $dx/P(x, y, z) = dy/Q(x, y, z) = dz/R(x, y, z)$ ve $u(x, y, z) = c_1$, $v(x, y, z) = c_2$ ve $F(u, v) = 0$ alınarak çözülürler.

Örnek: $(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = (x - y)$ kısmi türevli denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \rightarrow (y-z)+(z-x)+(x-y)=0$ ve $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0 \rightarrow dx+dy+dz=0$ ve $xdx+ydy+zdz=0 \rightarrow x+y+z=c_2$ ve $x^2+y^2+z^2=c_2$ asal integralleri elde edilir. Bunlara göre kısmi türevli denklemin çözümü, $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$ olur.

3) Birinci mertebeden lineer ve sabit katsayılı kısmi türevli denklemler:

a) Denklemin hiperbolik, parabolik ve eliptik şekillere dönüştürülmesi:

$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ şeklindeki kısmi türevli denklemin incelenmesi.

A, B, C katsayılarının hepsi sıfırdan farklı ve reel olması koşuluyla bu denklem ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer ve homojen kısmi türevli denklemdir. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$ alınırsa $Ar + 2Bs + Ct = 0$ olur. Bu denklemi çözmek için $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ alınırsa, burada α ve β reel be birbirinden farklı iki sayıdır, $(A + 2B\alpha + C\alpha^2) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2[A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta] \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (A + 2B\beta + C\beta^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$ olur. Buradaki α ve β sabitleri denklemi basit hale getirecek şekilde seçilir.

1) $AC - B^2 < 0$ ise $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ hiperbolik tip denklem ve çözümü $\frac{\partial z}{\partial u} = f(u) \rightarrow z = \int f(u) du + G(v) \rightarrow z = F(x + \alpha y) + G(x + \beta y)$ şeklindedir.

2) $AC - B^2 = 0$ ise $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$ parabolik tip denklem ve çözümü $z = vF(u) + G(v) \rightarrow z = (x + \beta y)F(x + \alpha y) + G(x + \alpha y)$ şeklindedir.

3) $AC - B^2 > 0$ ise $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$ eliptik tip denklem ve çözümü $z = F(u + iv) + G(u - iv)$ şeklindedir.

Örnek: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ kısmi türevli diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $u = x + y$ ve $v = y$ dönüştürmesi yapıldığında $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2 \frac{\partial z}{\partial u} = 0$ elde edilir. Bu denkleme $\frac{\partial z}{\partial u} = p$ dönüştürmesi yapıldığında $\frac{\partial p}{\partial v} - 2p = 0$ olur. Buradan $\log p - 2v = \log f(u) \rightarrow p = e^{2v} f(u) \rightarrow z = e^{2y} F(x + y) + G(y)$ olur.

3) MODELLEME:

1) Serbest düşme:

Sürtünmesiz ortamda $y(0) = 0$ dan $\dot{y}(0) = 0$ ilk hızsız serbest bırakılan m kütleli bir cisme hareketi boyunca -y eksenini yönünde $\vec{G} = -m \cdot g \cdot \vec{j}$ yerçekimi kuvveti (ağırlık) etki eder. Burada j, +y yönünde birim vektördür. Bu durumda cisme etki eden net kuvvet $\vec{F}_{net} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2 \vec{y}(t)}{dt^2} = -mg \vec{j}$ dir. Bu denklem skaler olarak yazılırsa; $\ddot{y} = g$ olur. Denklemin çözümü; $r^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = 0 \rightarrow y_1 = c_1 + c_2 t$ olur. İkinci tarafın çözümü için $y_2 = pt^2 + qt + k$ nin ikinci türevi denklemde yerine konursa $2p = g \rightarrow p = g/2$, $q = 0$, $c = 0 \rightarrow y_2 = (1/2)gt^2$ olur. Genel çözüm $y = y_1 + y_2 = c_1 + c_2 t + (1/2)gt^2$, sınır koşullarından $c_1 = 0$, $\dot{y}(0) = c_2 + 0 = 0 \rightarrow c_2 = 0$ ve buradan genel çözüm $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$ olarak bulunur.

2) Paraşüt:

Paraşüte etki eden kuvvetler aşağıya doğru ağırlık ve yukarıya doğru havanın direnç (sürtünme) kuvvetidir. Direnç kuvveti $F_d = K \cdot A \cdot v^2$, ağırlık $G = m \cdot g$ dir. Burada K paraşütün geometrik yapısı ile havaya göre yoğunluğuna bağlı sabit, A paraşütün

hareketine dik en büyük kesit alanı, v ise hızdır. Paraşüte etki eden net kuvvet $F_{\text{net}}=G-F_d \rightarrow m\dot{v} = mg - bv^2$ dir. Burada $b=KA$ dir. Bu durumda $\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v^2$ olur. Bu denklem $v(0)=0$ başlangıç koşullarında çözülür. $\int_0^v \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v^2} = \int_0^t dt \rightarrow$

$$\sqrt{\frac{m}{4bg}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{mg}{b}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{b}} - v} \right| \Big|_0^v = -t \Big|_0^t \rightarrow \ln \left| \frac{k+v}{k-v} \right| = -qt \rightarrow \left| \frac{k+v}{k-v} \right| = e^{-qt} \rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{b}} \left[\frac{1-e^{-qt}}{1+e^{-qt}} \right] \text{ olur. Burada } q = \sqrt{\frac{4bg}{m}} \text{ dir. Bu durumda}$$

$$t=0 \text{ iken } v=0, t \rightarrow \infty \text{ da } v = \sqrt{\frac{mg}{b}} = v_{\text{lim}} \text{ hız koşulları sağlanır.}$$

3)Newton'un soğuma kanunu:

Herhangi bir t anında binanın iç sıcaklığı $T(t)$, dış sıcaklığı T_A =sabit olsun. Newton'un soğuma kanununa göre; bina içindeki sıcaklığın zamana göre değişimi iç ve dış sıcaklık farkı ile doğru orantılıdır. Bu durumda $\frac{dT}{dt} = k(T - T_A)$ olur. Buradan $\frac{dT}{T - T_A} = k dt \rightarrow \int \frac{dT}{T - T_A} = k \int dt \rightarrow \ln|T - T_A| = kt + c \rightarrow T(t) = T_A + C \cdot e^{kt}$ olur. Burada C sabiti başlangıç veya sınır koşullarından bulunur. Örneğin bir binanın ısı iletim/yalıtım katsayısı yaklaşık olarak belirlenecektir. Bina iç sıcaklığı 25°C , dışardaki hava sıcaklığı -15°C dir. Hiçbir ısıtıcı kullanmadan 10 saat sonra bina içi sıcaklığı 5°C , bina dışı sıcaklığı -15°C dir. Bu durumda k iletim katsayısı yaklaşık kaçtır?. İlk durum için $25 = -15 + C \cdot e^{k \cdot 0} \rightarrow C = 40$ olur. Son durumda $5 = -15 + 40 \cdot e^{36000 \cdot k} \rightarrow \ln(1/2) = 36000 \cdot k \rightarrow -2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/saniye olur.}$

4)Silindir bir taktaki bir delikten akan su (Torricelli kanunu):

İçi su dolu tankın üst kısmının yüzey alanı B , deliğin alanı A , başlangıçta deliğin su yüzeyine olan uzaklığı H , suyun delikten çıkış katsayısı k olsun. Bir t anında su yüzeyi delikten $h(t)$ kadar yüksekte iken $v(t) = k\sqrt{4gh(t)}$ olur. Delikten Δt sürede akan suyun hacmi $\Delta V_D = A \cdot v \cdot \Delta t$, tankta azalan su hacmi $\Delta V_T = -B \cdot \Delta h$ ve bunların eşitliğinden $-B \cdot \Delta h = A \cdot v \cdot \Delta t \rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{A}{B}v \rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{B \cdot k}{A}\sqrt{2gh}$
 $\rightarrow \int_H^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{Bk\sqrt{2g}}{A} \int_0^t dt \rightarrow 2\left(h^{\frac{1}{2}} - H^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{Bk\sqrt{2g}}{A}t \rightarrow h(t) = \left(H^{1/2} - \frac{Ak\sqrt{2g}}{2B}t\right)^2$ şeklinde $h(t)$ bulunur. Tankın deliğe kadar boşalma süresi $h=0 \rightarrow t_b = \frac{2BH^{1/2}}{Ak\sqrt{2g}}$ olarak bulunur.

5)Basit sarkaç:

M kütleli ve L uzunluklu bir basit sarkaç denge konumundan θ_0 açısı kadar ayrılp serbest bırakılıyor. Sürtünmeler önemsiz ve $\theta_0 < 10^\circ$ dir. Sarkacın ipi bir t anında denge doğrultusu θ açısı yapsın. Bu durumda sarkaç kütesine etkiyen $G=mg$ ağırlık kuvvetinin hareket yörüngesine teğet ve dik bileşenleri sırasıyla; $F_T = mg\sin\theta$, $F_N = mg\cos\theta$ büyüklüğündedir. Hareket doğrultusundaki bileşen teğet bileşen olduğundan $m \cdot a = -mg\sin\theta \rightarrow \frac{d}{dt}\left(L \frac{d\theta}{dt}\right) = -g\sin\theta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ olur. Bu denklem $\sin\theta \approx \theta$ durumundan $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$ olur. Burada $\omega^2 = g/L$ dir. Denklemin genel çözümü $r^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm i\omega \rightarrow$
 $\theta(t) = A \cdot \sin\omega t + B \cdot \cos\omega t$ şeklinde olur. Buradaki A ve B katsayıları başlangıç koşullarından belirlenir; $t=0$ da $\theta = \theta_0$ ve $d\theta(0)/dt = 0$ alınırsa $A=0$, $B=\theta_0 \rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(\omega t + \beta)$ olur. Burada β faz açısıdır.

6)Radyoaktif bozunma:

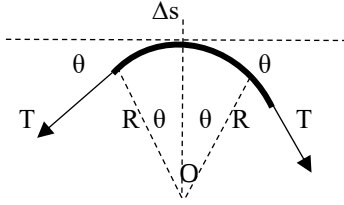
Başlangıçta bozunmamış radyoaktif çekirdek sayısı N_0 , bir t anında bozunmamış çekirdek sayısı $N(t)$ olsun. Radyoaktif bozunum kanununa göre bozunum hızı çekirdek sayısı ile doğru orantılıdır. Bu durumda $\Delta N = -k \cdot N \cdot \Delta t \rightarrow \frac{dN}{N} = -k \cdot dt \rightarrow$
 $\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -k \int_0^t dt \rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -kt \rightarrow N(t) = N_0 e^{-kt}$ olur. Buradaki k radyoaktif bozunma sabitidir, $1/k$ ortalama ömürdür. Yarı ömür $N_0/2 = N_0 \cdot e^{-kt} \rightarrow t_{1/2} = \ln 2/k$ olur. Çoğalma popülasyonunda $\Delta N = kN\Delta t$ alınır.

7)Seri RLC devresinde akım:

Seri bir RLC devresinde gerilimlerin toplamı kaynak gerilimine eşittir. Bu devrede R direnci, L bobin indüktansı, C condansatör kapasitansı, $V(t)$ kaynak gerilimidir. Devreden geçen akım $i(t)$ ise; $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v(t)$ dir. $V(t) = V_m \sin\omega t$ olsun. Bu durumda integralden kurtarmak için her iki tarafın türevi alınır; $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega V_m \cos\omega t$. Sol taraf için $r^2 + (R/L)r + (1/LC) = 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{(-R/L) \pm \sqrt{(R/L)^2 - 4(1/LC)}}{2}$ karakteristik köklere göre i_1 bulunur. Sağ taraf için $i_2 = A \sin\omega t + B \cos\omega t$ şeklinde çözüm denenerek A ve B katsayıları belirlenir. Genel çözüm $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ şeklinde olur.

Örneğin $R=4 \text{ ohm}$, $L=2 \text{ Henry}$, $C=1/2 \text{ Farad}$, $V_m=5 \text{ Volt}$, $\omega=30 \text{ rad/s}$ ise $i(t)$ yi bulalım. Başlangıçta $i(0)=0$ ve $i'(0)=0$ olsun. Diferansiyel denklem; $2i'' + 4i' + 2i = 150 \cdot \sin 30t \rightarrow$ kararlı hal çözümü $r^2 + 2r + 1 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -1 \rightarrow i_1(t) = (K_1 + K_2 \cdot t)e^{-t}$ olur. Özel çözüm $i_2(t) = A \cdot \sin 30t + B \cdot \cos 30t \rightarrow$ denklemde yerine konularak $A = -0,0055$, $B = -0,082 \rightarrow i_2(t) = -0,0055 \sin 30t - 0,082 \cos 30t$ olur. Genel çözüm; $i(t) = (K_1 + K_2 \cdot t)e^{-t} - 0,0055 \sin 30t - 0,082 \cos 30t$ şeklinde olur. Başlangıç koşullarından $i(0) = 0 = K_1 - 0,082 \rightarrow K_1 = 0,082$, $i'(0) = 0 = K_2 - (0,082 + 0) - 0,165 + 0 \rightarrow K_2 = 0,247$ olur. Genel çözüm; $i(t) = (0,082 + 0,247t)e^{-t} - 0,0055 \sin 30t - 0,082 \cos 30t$ olur.

8)İpte oluşturulan dalgalının yayılma hızı:



Uzunluğu L, kütlesi M ve gerilme kuvveti T olan bir ip üzerinde oluşturulan küçük bir titreşimin yayılma hızını bulalım. İp üzerinde alınan Δs uzunluğundaki küçük parçanın üzerine etki eden kuvvetler şekildeki gibi olur. T gerilme kuvvetlerinin yatay bileşenlerinin toplamı sıfırdır. Düşey bileşenlerinin toplamı ise, titreşim düşeyde olduğundan, $\sum T_y = 2T \sin \theta = m \cdot a_y$ dir. Küçük açılarda $\sin \theta \approx \theta$ alınırsa, $2T \cdot \theta = \frac{M \Delta s}{L} \left(\frac{v^2}{R} \right) \rightarrow v^2 = \frac{2T \theta R L}{M \Delta s} \rightarrow v^2 = \frac{TL}{M} \rightarrow v^2 = \frac{T}{M/L} \rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ olarak hız bulunur. Burada μ , ipin çizgisel yoğunluğudur.

9)Bir boyutta dalga denklemi:

İpte oluşturulan titreşimde açıları bir birinden farklı alalım; soldaki açı θ_1 , sağdaki açı θ_2 olsun. İp parçasına etki eden yatayda toplam kuvvet sıfır, titreşim enine olduğundan düşeydeki toplam kuvvet $T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1 = m a_y$ olur. Küçük açı yaklaşımından

($\sin \theta \approx \tan \theta$) dir. Bu durumda $T \tan \theta_1 - T \tan \theta_2 = m a_y \rightarrow T \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_2 - \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 \right] = m \frac{d^2 y}{dt^2} \rightarrow \frac{\mu}{T} \frac{d^2 y}{dt^2} = \left[\frac{\left(\frac{dy}{dx} \right)_2 - \left(\frac{dy}{dx} \right)_1}{\Delta x} \right] \rightarrow \frac{\mu}{T} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \rightarrow$

$\frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 y(x,t)}{dx^2}$ şeklinde bir boyutta dalga denklemi bulunur.

Bu denklemi çözelim. $Y(x,t) = F(x) \cdot G(t)$ alıp denklemden yerine koyarsak $F(x) \frac{d^2 G(t)}{dt^2} = \frac{1}{v^2} G(t) \frac{d^2 F(x)}{dx^2}$ olur. Bu denklemin her iki tarafı da $-w^2$ ye eşit olsun. Bu durumda $\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + w^2 G(t) = 0$ ve $\frac{d^2 F(x)}{dx^2} + v^2 w^2 F(x) = 0$ olur. Burada $(vw)^2 = k^2$ alındığında; $F(x) = A_1 \sin kx + B_1 \cos kx$, $G(t) = A_2 \sin wt + B_2 \cos wt$ elde edilir. Genel çözüm $Y(x,t) = [A_1 \sin kx + B_1 \cos kx] [A_2 \sin wt + B_2 \cos wt] \rightarrow Y(x,t) = A \sin(kx - wt) + B \cos(kx - wt)$ olur. Başlangıç koşulları kullanıldığında $Y(x,t) = A \sin(kx - wt)$ olur.

10)Sönümlü harmonik hareket:

Yay sabiti k olan bir yaya bağlı m kütleli bir cisim sürtünmeli bir ortamda harmonik hareket yapıyor olsun. Sönüm sabiti b, sönüm kuvveti $F = -bv$ şeklinde hıza bağlıdır. Hareket süresince cismin hareketine katkıda bulunan sürücü kuvvet $F(t) = F_0 \cos wt$ olsun.

Bu durumda hareket denklemi $m \cdot a = -kx - bv + F(t) \rightarrow a + (k/m)x + (b/m)v = (F/m) \rightarrow \ddot{x} + \Gamma \dot{x} + w_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos wt$ dir. Bu denklemin

kararlı hal çözümü $r^2 + \Gamma r + w_0^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4w_0^2}}{2}$ karakteristik köklerin özelliklerine göre $x_1(t)$ yazılır. Bu durumda $w_1^2 = w_0^2 - \Gamma^2/4$ alırsak $x_1(t) = e^{-(1/2)\Gamma t} [A_1 \sin w_1 t + B_1 \cos w_1 t]$ şeklinde olur. İkinci taraflı denklemin çözümü $x_2(t) = A_2 \sin wt + B_2 \cos wt$ şeklinde olmalıdır. Bu ifade ve türevleri denklemden yerlerine konarak A_2 ve B_2 katsayıları bulunur. Bu durumda $A_2 = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma w}{(w_0^2 - w^2)^2 + (\Gamma w)^2}$

ve $B_2 = \frac{F_0}{m} \frac{(w_0^2 - w^2)}{(w_0^2 - w^2)^2 + (\Gamma w)^2}$ olur. Burada A_2 soğurgan genlik, B_2 ise esnek genliktir. Buradan genel çözüm $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ olur.

Alıştırılmalar:

1) $y^2 dx + (2y^2 - 1) dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $x = -1/y - 2y + c$) =

2) $(xy^2 + x) dx + (x^2 y + y) dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = c$)

3) $(x + 2y - 2) dx + (2x - y + 3) dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $x^2/2 + 2xy - 2x - y^2/2 + 3y = c$)

4) $y' - (1/x)y = x^n$ ($n \neq 0$) diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y = (x^{n+1}/n) + cx$)

5) $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{x^2-1} = x$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y = x^2 - 1 + c(x^2 - 1)^{1/2}$)

6) $y = xy' + y'^2$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y = cx + c^2$; $y = -x^2/4$)

7) $y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y = ce^{-\sin x} + \sin x - 1$)

8) $y' = (y/x) + \tan(y/x)$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y = x \cdot \text{Arcsin} x$)

9) $yy' + y^2 = \cos x$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y^2 = ce^{-2x} + (2/5)\sin x + (4/5)\cos x$)

10) $(2e^x + y^4)dy - ye^x dx = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $cy^2 = 2e^x - y^4$)

11) $e^{x-y}y' = 1$ denklemini $x=1$ için $y=1$ başlangıç koşullarına göre çözünüz. (Cevap: $y=x$)

12) $y'' + y = \cos x$ diferansiyel denklemini $x=0$ için $y=1/2$ başlangıç koşullarına göre çözünüz. (Cevap: $y=(1/2)(\sin x + \cos x)$)

13) $y'' = e^{2x} + \cos 2x$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y=(1/4)e^{2x} - (1/4)\cos 2x + c_1x + c_2$)

14) $y'' - 2y' = e^{2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y=(1/4)(2x-1)e^{2x} + c_1e^{2x} + c_2$)

15) $y'' + y' = \sin x$ diferansiyel denklemini, $x=\pi/2$ için $y=-3$ ve $y'=1/2$, şartlarına göre çözünüz. (Cevap: $y=-(1/2)(\cos x + \sin x + 5)$)

16) $y'' - 4y' + 3y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y=c_1e^x + c_2e^{3x}$)

17) $y'' + 2y' + 2y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y=e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$)

18) $y'' + 3y' + 2y = 0$ diferansiyel denklemini $y(0)=1$, $y'(0)=-1$ koşullarına göre çözünüz. (Cevap: $y=e^{-x}$)

19) $y'' - 2y' + y = e^x$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y=e^x[(1/2)x^2 + c_1x + c_2]$)

20) $y'' + 2y' + 2y = \sin 2x$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y=e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) - (1/5)\cos 2x - (1/10)\sin 2x$)

21) $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + x(x/10 - 1/25)e^{2x}$)

22) $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - e^{2x}/20 (\sin 2x + 2 \cos 2x)$)

23) $y'' - 2y' + y = e^x/x$ diferansiyel denklemini sabitin değişimi kuralı ile çözünüz. (Cevap: $y = (c_1 + c_2 x)e^x + x e^x \ln x$)

24) $y^{(4)} + 6y'' + 16y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x$)

25) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ diferansiyel denklemini (Euler denklemi) çözünüz. (Cevap: $y = c_1 x + c_2 x^2$)

26) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x$ diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + x/2$)

27) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 4y + 7z = 0 \\ \frac{dz}{dx} - 7y - 10z = 0 \end{cases}$ diferansiyel denklem sistemini çözünüz. (Cevap: $\begin{cases} y = (c_1 x + c_2) e^{3x} \\ z = -(c_1 x + \frac{c_1}{7} + c_2) e^{3x} \end{cases}$)

28) $dy/dx=4y+2z+x$ ve $dz/dx=-y+z$ diferansiyel denklem sistemini çözünüz. (Cevap: $y=-x/6+1/36-2c_1e^{3x}-c_2e^{2x}$ ve $z=-x/6-5/36+c_1e^{3x}+c_2e^{2x}$)

29) $(D+1)^2y_1+2Dy_2+3Dy_3=1$, $Dy_1+y_3=0$ ve $y_1-Dy_2-Dy_3=0$ diferansiyel denklem sistemini çözünüz. (Cevap: $y_1=1/3+c_1e^{-3x/2}$, $y_2=x/3-13/6c_1e^{-3x/2}+c_2$, $y_3=3/2c_1e^{-3x/2}$)

30) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ kısmi diferansiyel denklemini çözünüz. (Cevap: $z=f(3x+y)+g(x-y)$)

Mehmet Taşkan

www.fizikselevren.com

Kaynaklar:

- 1) Dennis G.Zill, Warren S.Wright, “ Matematik “ cilt-1, cilt-2 (Calculus), 4.baskıdan çeviri, Çeviri editörü: Prof.Dr. İsmail Naci Cangül, Nobel yayınları, 2020, 2017.
- 2) Prof.Dr. Ahmet A.Karadeniz, “Yüksek matematik” cilt-1 , cilt-2, cilt-2, 8.baskı, Çağlayan Kitabevi, 2000, İstanbul.
- 3) Prof Dr.Coçkun Önem, “Mühendislik ve Fizikte Matematik Metotlar”, 3.baskı, Birsen Yayınevi, 2003, İstanbul.
- 4) Erwin Kreyszig, Edward J. Norminton, “Advanced Engineering Mathematics” 10th edition.