KLASİK MEKANİK-2

BÖLÜM-7
İKİ-CİSİM PROBLEMİ

1)KÜTLE MERKEZİ VE GÖRELİ KOORDİNATLAR: Konum vektörleri $r_1$ve r_2, kütleleri $m_1$ve m_2 olan iki parçacığın bir birine uyguladığı kuvvet F ise, bunların düzgün bir g kütle-çekim alanı içinde hareket denklemleri; $m_1\ddot{r}_1 = m_1 g + F$, $m_2\ddot{r}_2 = m_2 g - F$ olur. Buradaki r_1 ve r_2 yerine bunlar cinsinden tanımlanan kütle merkezinin konumu $R = \dfrac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$ ve göreli konum $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ yi kullanmak daha uygun olur. Buradan, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ **indirgenmiş kütle** olmak üzere, hareket denklemini μ $(d^2r/dt^2)=F$ şeklinde elde ederiz. Kütle merkezinin momentumu M(dR/dt) =P=sabit, açısal momentumu ise $\vec{J} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, kinetik enerjisi ise $T = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ olarak bulunur. Burada $M=m_1+m_2$ dir.

2)KÜTLE MERKEZİ ÇERÇEVESİ: Bir sistemin hareketini çoğu kez, referans çerçevesinin orijinini kütle merkezinde ve durgun olarak incelemek uygun olur. Bu kütle merkezi çerçevesidir. Kütle merkezine ait büyüklükleri göstermek için, üstlerine yıldız kullanacağız. Bu durumda iki parçacıklı sistemin kütle merkezi çerçevesinde momentumu $P^*=\mu(dr/dt)$, açısal momentumu $\vec{J}^* = \vec{r} \times \vec{P}^*$ ve kinetik enerji de $T^*=(1/2)\mu.(dr/dt)^2$ olur.

Bir gezegen çevresinde dolanan bir uydunun hareketini incelerken kütle merkezi çerçevesinden yararlanılabilir. Buna iyi bir örnek Dünya-Ay ikilisidir. Bu durumda Dünya-Ay ikilisinin kütle merkezi güneş etrafında bir elips çizer.

3)ESNEK ÇARPIŞMALAR: İki parçacık arasındaki çarpışmada kinetik enerji kaybı yoksa, yani kinetik enerji korunuyorsa, bu çarpışma esnek çarpışmadır. Esnek çarpışmalar atom ve nükleer fizikte çok önemlidir. Pratikte yapılan çoğu deneylerde parçacıklarda biri laboratuarda durgundur (veya hemen hemen durgundur). $P_2=0$ olduğu bu çerçeve laboratuar çerçevesidir. Gelen parçacığın laboratuar momentumu P_1 çarpışmadan sonraki momentumları q_1 ve q_2 ile ve saçılma ve geri tepme açılarını da θ ve α ile gösterelim. Bu durumda $q_1=(m_1/m_2)p^*+q^*$, $q_2=p^*-q^*$ yazılabilir. Burada * kütle merkezini belirtiyor. Lab çerçevesinde $p_1=q_1+q_2$ dir. Geri tepme açısı ve geri tepme momentumu; $\alpha=(1/2)(\pi-\theta^*)$, $q_2=2p^*.\sin(\theta^*/2)$ ile verilir. Buna göre hedef parçacığa aktarılan Lab kinetik enerjisi $T_2=(q_2^2/2m_2)$ olur. Buradan da, aktarılan kinetik enerjinin toplam kinetik enerjiye oranı, $\dfrac{T_2}{T} = \dfrac{4m_1 m_2}{M^2} Sin^2(\theta^*/2)$ olarak bulunur.

4)KM VE LAB TESİR-KESİTİ: Bölüm-4'de çıkardığımız, özdeş N parçacıklı, f akılı parçacıkların hedeften uzakta, dA tesir kesitli bir dedektörün algılama oranı $dw = Nf\dfrac{d\sigma}{d\Omega}\dfrac{dA}{L^2}$ dır. Burada $d\sigma/d\Omega$ oranı **Lab diferansiyel tesir kesiti**dir. Şimdi zıt yönlerden birbirlerine yaklaşan momentumları eşit büyüklükte iki parçacık demeti düşünelim. Bu KM çerçevesi ile doğrudan ilgileneceğimizi belirtir. Demetlerden birindeki parçacıkların a_1, diğerindekilerin de a_2 yarıçaplı sert kürelerden oluştuğunu varsayalım. Çarpışma için $b<a=a_1+a_2$ olmalıdır. Bu durumda $\sigma=\pi a^2$ olur. $b=a.\sin\alpha=a\cos(\theta^*/2)$, katı açı da $d\Omega^*=\sin\theta^* d\theta^* d\varphi$ iken **KM diferansiyel tesir kesiti** $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{1}{4}a^2$ olur. Küçük bir V hacminden saçılan parçacıkları kaydetmesi için bir dedektör kurduğumuzda,

parçacıkların sayılma oranı $dw = n_1 n_2 vV \frac{d\sigma}{d\Omega *}\frac{dA}{L^2}$ olacaktır. Burada n_1 ve n_2 demetlerdeki birim hacimlerdeki parçacık sayıları, v parçacıkların bağıl hızıdır.

BÖLÜM-8
ÇOK CİSİMLİ SİSTEMLER

1)MOMENTUM; KÜTLE MERKEZİ HAREKETİ: Kütle merkezinin konumu, $M = \sum_i m_i$ olmak üzere, $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$ denklemi ile tanımlanır. Toplam momentum da $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}}$ olur. Bu, kütle merkezine yerleştirilen, M kütleli bir parçacığın momentumuna eşittir. Bu durumda momentumun değişme hızı $\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i$ şeklinde sadece dış kuvvetlerin toplamına eşit olur.

2)ROKETLER: Yalıtılmış bir sistem için, momentumun korunumunun kullanılmasına örnek olarak, bir roketin hareketini inceleyelim. Roketin kendisine göre u hızı ile madde püskürttüğünü varsayalım. Madde püskürtme oranı sabit olmayabilir. Belli bir anda roketin kütlesi M hızı v olsun. Küçük bir dm kütlesinin püskürtüldüğünü veya atıldığını göz önüne alalım. Bu kütlenin püskürtülmesinden sonra roketin kütlesi; dM=-dm olacak şekilde azalır ve hızı v+dv olacak şekilde artar.

momentumun korunumu; (M-dm)(v+dv)+dm.(v-u)=M.v eşitliğinin yazılabilmesi demektir. İkinci mertebeden terimleri ihmal ederek; M.dv=u.dm elde edilir. Bu bağıntı dM=-dm bağıntısıyla birleştirildiğinde $\frac{dv}{u} = -\frac{dM}{M}$ olur. her iki tarafın integrali alınarak $\frac{v}{u} = -\ln M + sabit$ bulunur. Başlangıçta $M=M_0$ olduğundan integral sabiti, $\ln M_0$ bulunur. Buradan da roketin kütlesin hıza bağlı değişimi $M = M_0 e^{\frac{-v}{u}}$ bulunur. Bu bağıntı, roketin hızının, madde püskürtme hızına erişe bilmesi için kütlenin 1/e kadarı hariç, tamamının roketten atılmasını göstermektedir. Roketin hızı, kütle atılma oranına değil de, püskürtülen maddenin (gazın) hızına ve ilk kütlesinden ne kadar atıldığına bağlıdır. hızlanmanın çok kısa bir sürede olması, ya da daha uzun bir zamana yayılarak, daha yumuşak bir hızlanma sağlanması arasında fark yoktur. (hızlanma süresinde rokete başka kuvvetlerin etkimediği varsayılmaktadır. Yerçekimi tarafından sürekli engelleneceğinden, uzun süren ve yavaş bir hızlanma ortaya koyan bir roketle dünyadan kurtulmaya çalışmanın gereksizliği açıktır.)

Gezegenler arası uçuşlarda, roketler normalde çok kısa sürelerle kullanılır. Bu kısa süreler arasında, uzay gemisi serbest bir bölgeye hareket eder. Roketin ateşleme süresi, roketin konumunda değişiklik yapmayacak kadar kısa ise, hızın, her seferinde ani olarak değiştiği kabul edilebilir. Bu ani değişmeler **hız limitleri (impulslar)** olarak bilinir. Belli bir yükü taşımak için tasarlanan bir roket kütlesinin, verilen bir püskürtme hızından bulunması için gereken anlamlı büyüklük, bu hız limitlerinin toplamıdır (buradaki toplam skaler toplamdır). Örnek olarak, dünyadan kurtulmak için gereken hız limiti 11 km/s dir. Uzaya yeniden dönüşteki yavaşlama, atmosferik sürtünmelerden ışık roketinin kendisi tarafından sağlanıyorsa, bu 22 km/s olur.

3)AÇISAL MOMENTUM; MERKEZİ İÇ KUVVETLER: Parçacıklar sisteminin toplam açısal momentumu $\vec{J} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ ile verilir. Bu ifadeden J'nin değişme hızı ise $\dot{\vec{J}} = \sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ şeklinde iç ve dış kuvvetlere bağlı olarak bulunur. $r=r_1-r_2$ ve $F=F_{12}=-F_{21}$

alırsak J'nin değişim hızındaki ilk terim (iç kuvvetler-ki bunların merkezi olduğunu varsayıyoruz) sıfır olur, $\dot{\vec{J}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.

Çoğu kez, kütle merkezinin ve kütle merkezine göre bağıl hareketin J'ye katkılarını ayırmak kolaylık sağlar. Parçacıkların, kütle merkezine r^*_i göre konumları $\vec{r}_i = \vec{R} + r_i^*$ şeklinde tanımlanır. Kütle merkezinin kendine göre konumu sıfır olduğundan, J için, $\vec{J} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{J}*$ ifadesi bulunur.

4)DÜNYA-AY SİSTEMİ: Açısal momentumun korunumuna ilginç mir örnek olarak, dünya ve aydan oluşan sistemi göz önüne alalım (diğer gezegenlerin etkisini ihmal edip, güneşin yerini sabit alıyoruz). Sistemin açısal momentumu, J* kütle merkezine göre açısal momentum olmak üzere, $\vec{J} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{J}*$ olur. Her cismin kendi merkezi etrafında dönmesinden kaynaklanan açısal momentumlar J_y* ve J_A* , yörünge açısal momentum $\mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ ise, sistemin kütle merkezinin açısal momentumu $\vec{J*} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} + \vec{J}_Y * + \vec{J}_A*$ olur. Açısal momentum J=I.w şeklinde eylemsizlik momentine bağlıdır. Düzgün yoğunlukta ve r yarıçaplı küre için eylemsizlik momenti $I = \frac{2}{5}mr^2$ dir. Aslında yerin yoğunluğu merkeze doğru arttığından, I yaklaşık olarak $0{,}33mr^2$ dir. Dolayısıyla, kütle merkezine göre toplam açısal momentum, Ω ayın yörünge açısal hızı olmak üzere, $J^*=\mu a^2\Omega+0{,}33mr^2w$ olur. Açısal hızları, w nın bilinen w_0 değeri cinsinden ifade etmek uygun olur. m/μ=82,3 değerini kullanarak, korunum yasasını $\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\Omega}{w_0} + 27{,}2.\frac{w}{w_0} = 160$ şeklinde yazabiliriz.Denklemin sağ tarafındaki sabit; a/r=60,3 ve $\Omega/w_0=0{,}0365$ değerleri kullanılarak elde edilmiştir.

5)ENERJİ VE KORUNUMLU KUVVETLER: Bir parçacıklar sisteminin kinetik enerjisi, kütle merkezinin kinetik enerjisini de içerecek şekilde, $T = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{r}*_i^2$ olarak yazılabilir. Kinetik enerjisinin değişme hızı $\dot{T} = \sum_i \dot{r}_i F_{ij} + \sum_i \dot{r}_i F_i$ şeklinde yazılabilir. Eğer cismimiz katı cisim ise, r sabit olacağından, iç kuvvetler iş yapmaz. Bu durumda tüm iç kuvvetler korunumludur kabullenmesi yapabiliriz. Ancak iki parçacık arasında F kuvvetini veren bir iç potansiyel olmalıdır. Bu durumda, toplam iç kuvvetlerin iş yapma hızı, $V_{iç}$ in değişme hızının (-) işaretlisine eşit olur ve böylece $\frac{d}{dt}\left(T + V_{iç}\right) = \sum_i \dot{\vec{r}}_i.\vec{F}_i$ bağıntısı elde edilir.

6)LAGRANGE DENKLEMLERİ: Bu denklemleri bölüm-3'de çıkardık, $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$, α=1,2,3,……3N. Örnek olarak homojen gravitasyonel alan, g den kaynaklanan dış kuvvet durumunu ele alalım. buna karşı gelen potansiyel enerji fonksiyonu; $V_{dış} = -\sum_i m_i\vec{g}.\vec{r}_i = -MgR$ şeklindedir. Lagrange denklemi, üç adet R ve r^*_i koordinatları cinsinden (bunlardan 3N-3 tanesi bağımsızdır) ; $L = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + Mg.R + \sum_i \frac{1}{2}m.\dot{r}*^2 - V_{iç}$ bulunur. $V_{iç}$, yalnızca r_i-r_j=r_i*-r_j* ın fonksiyonu olduğundan, yalnız R ve r_i* ye bağlı terimlere ayrılabilir. Gravitasyonel alanın homojen olması durumunda; kütle merkezinin hareketi ve kütle merkezi etrafındaki hareket arasında bir çiftlenim olmaz. Özellikle enerji için iki farklı korunum yasası vardır. Bunlar; $\frac{1}{2}M\dot{R}^2 - Mg.R = sabit$ ve $T^*+V_{iç}$=sabit olarak ifade edilen yasalardır.

BÖLÜM-9
RİJİT CİSİMLER

1)TEMEL PRENSİPLER: Önceki bölümlerde kullanılan gösterimi, katı cisimdeki parçacıklar üzerinden toplamı ifade eden i yi atarak basitleştirmek uygun olur. Böylece, cismin açısal momentumu $\vec{J} = \sum m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, kütle merkezinin momentum hızı $\dot{\vec{P}} = M\dot{\vec{R}} = \sum \vec{F}$, açısal momentum hızı $\dot{\vec{J}} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$, kinetik enerjinin değişme hızı $\dot{T} = \sum \dot{\vec{r}}.\vec{F}$ (rijit cisimde iç kuvvetler iş yapmazlar) olur. Dış kuvvetlerin korunumlu olması halinde, $T+V_{dış}=E=$sabit enerji korunumuna götürür.

2)SABİT BİR EKSEN ETRAFINDA DÖNME: Şimdi bu temel denklemleri, sadece sabit bir eksen etrafında serbestçe dönmekte olan bir katı cisme uygulayalım. Bu eksen z-ekseni olsun, ayrıca orijinin konumunu öyle seçelim ki kütle merkezinin z koordinatı sıfır olsun. Bunun için silindirik kutupsal koordinatları kullanmak uygundur. Burada her bir noktanın z ve ρ koordinatları sabit, φ koordinatı $\dot{\varphi} = w$ şeklinde değişir. Dönme ekseni etrafında açısal momentum $J_z = \sum m.\rho.v_\varphi = I.w$ olur. Burada $I=\sum m.\rho^2$, z-eksenine göre **eylemsizlik momentidir.** I sabit olduğundan, açısal momentumun hızı $\dot{J}_z = I.\dot{w} = \sum \rho.F_\varphi$ olur, ki buna cismin **hareket denklemi** denir. Cisim için denge şartı ise sağ tarafın sıfır olmasıdır. Bu durumda cismin kinetik enerjisi T= $(1/2).I.w^2$ olur. Kütle merkezi için $\dot{\vec{P}} = M\dot{\vec{R}} = \sum \vec{F}$ momentum denklemi dönme eksenindeki teki kuvvetinin belirlenmesine yarar. Eksen üzerinde cisme etkiyen kuvvet Q ise, momentum denklemi $\dot{\vec{P}} = M\dot{\vec{R}} = Q + \sum \vec{F}$ olur. Kütle merkezinin ivmesi ise $\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{w}} \times \vec{R} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{R})$ olur. Burada birinci terim, φ yünündeki teğetsel ivme, ikinci terim ρ yönündeki radyal ivmedir.

Şimdi örnek olarak bir bileşik sarkacı (duvara asılmış bir mil etrafında serbestçe dönebilen bir metal pul) ele alalım. Mil z ekseni yönünde, sarkaç düzlemi ise xy düzlemi olsun. R vektörünün x ekseni ile yaptığı açı φ, z eksenine göre eylemsizlik momenti I ise, sarkacın hareket denklemi $I\ddot{\varphi} = -MgR\sin\varphi$ olur. Burada dikkat edilirse, bu L=I/MR boyunda basit bir sarkacın hareket denklemidir. Mile etki eden tepki kuvvetinin bileşenleri ise; $Q_z=0$, $Q_\rho=-Mg\cos\varphi-MR\varphi'^2$, $Q_\varphi=Mg\sin\varphi+MR\varphi''$ olur.

3)AÇISAL MOMENTUMUN DİK BİLEŞENLERİ: Dönen bir cismin, kartezyen koordinatlarda $\vec{r}$ noktasının hızı; $\dot{x} = -w.y$, $\dot{y} = w.x$, $\dot{z} = 0$ ile verilir. Buna göre J açısal momentumunun bileşenleri $J_x=I_{xz}w$, $J_y=I_{yz}w$, $J_z=I_{zz}w$ olur. Burada I_{zz} , z eksenine göre eylamsizlik momenti, I_{xz} ve I_{yz} ise **ikincil eylemsizlik momentleri**dir. $I_{xz}=-\sum mxz$, $I_{yz}=-\sum myz$, $I_{zz}=\sum m(x^2+y^2)$ dir. İki ucuna m kütleli iki cisim yapıştırılıyor. Çubuk bir eksenle θ açısı yapmakta ve kütlelerin konumları r ve –r dir. Bu durumda toplam $\vec{J} = 2m\vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r})$ dır. Burada J, r ye diktir ve çubuk xz düzleminde iken kütleler ±y yönünde hareket ederler. Bu durumda açısal momentumun hem z, hem de x bileşeni olur. Böylece, ikincil momentlerin; $\dot{I}_{xz} = -wI_{yz}$, $\dot{I}_{yz} = wI_{xz}$, $\dot{I}_{zz} = 0$ sıfır olmadığı görülür. Dış kuvvetler yoksa w sabit olur ve G tam olarak merkezkaç çifti dengeler. Çubuk xz düzleminde bulunduğunda, sıfır olmayan tek bileşen, y eksenine göre $G_y=I_{xz}w^2=-2mr^2w^2\sin\theta.\cos\theta$ momenti olur.

4)EYLEMSİZLİĞİN ANA EKSENLERİ: Açısal momentum vektörü J , açısal hız vektörü w dan farklı yönde olabilir. Bununla birlikte bazı özel durumlarda I_{xz} ve I_{yz} ikincil momentler sıfır olur. Bu durumda z eksenine **eylemsizliğin ana ekseni** denir. Bir cisim kendi kütle merkezinden geçen bir eksen etrafında serbestçe döndüğü zaman, eksen üzerinde ne bir bileşke kuvvet, ne de bir çift vardır. Özellikle, xy düzlemi yansıma simetrisi düzlemi ise, z ekseni ana eksen olur. Bu durumda her hangi bir (x,y,z) noktasından I_{xz} ve I_{yx} ikincil momentlere katkı, (x,y,-z) noktasından gelen katkı tamamen bir birini götürür… Simetri eksenine sahip cisimlerde (küp, küre,…) bir birine dik üç ana eksen bulunur ve bu eksenleri koordinat eksenleri olarak seçmek avantaj sağlar . Böylece, z-eksenini dönme ekseni olarak kabul etmek durumunda olmayız ve keyfi bir yönelime sahip olarak alırız. O zaman w ve J üçer bileşene sahip olur. J nin bileşenlerinin matris gösterimi; $\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$ olur. Burada I matrisi bir tensör olup, **eylemsizlik tensörü** olarak adlandırılır. İkincil eylemsizlik momentlerinin $I_{xy}=I_{yx}$ ..gibi, I matrisini esas köşegene göre yansımalarla değişmez kılar. Bu özelliğe sahip I tensörüne **simetrik tensör** denir. şayet üç koordinat ekseninin üçü de simetri ekseni ise, bu durumda tüm ikincil momentler sıfır olur ve I köşegen biçimlidir. Böylece J nin bileşenleri; $J_x=I_{xx}w_x$, $J_y=I_{yy}w_y$, $J_z=I_{zz}w_z$ şeklinde basitleşir. Verilen herhangi bir simetrik tensör için, tensörü köşegen yapan daima bir eksen takımı bulunabilir.Bulunan bir birine dik eylemsizliğin ana eksenleri boyunca e_1, e_2, e_3 birim vektörleri tanımlamak uygun olur. Buna göre, $\vec{w} = w_1\hat{e}_1 + w_2\hat{e}_2 + w_3\hat{e}_3$ ve $J=I_1w_1e_1+I_2w_2e_2+I_3w_3e_3$ olur. Buradaki I_1, I_2 ve I_3 ‘e **ana eylemsizlik momentleri** denir. T kinetik enerji de açısal hız ve eylemsizlik tensörü cinsinden $T = \frac{1}{2}\vec{J}.\vec{w}$ ya da $T = \frac{1}{2}I_1w_1^2 + \frac{1}{2}I_2w_2^2 + \frac{1}{2}I_3w_3^2$ şeklinde ifade edilebilir.

5)EYLEMSİZLİK MOMENTİNİN HESAPLANMASI: Maddenin sürekli dağılımı halinde, ρ(r) yoğunluk olmak üzere, ana ve ikincil eylemsizlik momentleri; $I_{xx}= \iiint \rho(r)(y^2+z^2)d^3r$, $I_{xy} = \iiint \rho(r)(-xy)d^3r$ şeklindedir.

a)Orijin kayması: Kütle merkezi orijin kabul edilerek bulunan eylemsizlik momentleri * işaretli gösterirsek (r=R+r* kullanarak), keyfi bir eksene göre bulunan ana ve ikincil eylemsizlik momentleri; $I_{xx}=M(Y^2+Z^2)+I_{xx}^*$, $I_{xy}=-MXY+I_{xy}^*$ şeklinde olur. Buna **paralel eksen teoremi** de denmektedir.

b)Routh kuralı: Burada cisimlerin düzgün yoğunluklu ve üç dik simetri düzlemli oldukları varsayılır. Bu durumda ana eksenler koordinat eksenleri olarak alınır ve böylece eylemsizlik momentleri $I_1^*=K_y+K_z$, $I_2^*=K_z+K_x$, $I_3^*=K_x+K_y$ yazılır. Burada $K_z= \iiint \rho.z^2dx.dy.dz$, integrali cismin V hacmi üzerinden alınır. Cismin kütlesi ise $M = \iiint_v \rho.dx.dy.dz$ dir. Simetri eksen uzunluklarını 2a,2b,2c ve tüm cisimlerin aynı tipte (diyelim elipsoidler), fakat farklı a,b,c değerlerine sahip oldukları düşünüldüğünde M ve K_z nin bu uzunluklara bağlılığı belirlenebilir. x=a.f, y=b.k, z=c.r alınırsa M nin ρabc, K_z nın da ρabc^3 ile orantılı olduğu görülür. O halde, λ birimsiz sayı olmak üzere (orantı sabiti), bu tipteki tüm cisimler için aynı olan $K_z=\lambda_zM.c^2$ yazılabilir. Buradan **Routh kuralı,** $I_1^*=M(\lambda_y.b^2+ \lambda_z.c^2)$, olacağını söyler. Bu kural diğer iki ana momentler için de benzer ifadeler verir. a=b=c=1 özel durumu için λ sayısı bulunabilir. örneğin birim yarıçaplı bir küre için, $K_z = \rho\iiint z^2dxdydx = \rho\int_{-1}^{1} z^2\pi(1-z^2)dz = \frac{4\pi}{15}\rho$ olur. M=4πρ/3 olduğundan burada λ_z=1/5 dir. O halde elipsoid için $\lambda_x=\lambda_y=\lambda_z$=1/5 olur. Benzer hesaplamalarla, dikdörtgen paralel yüzlü için 1/3, eliptik silindir için (1/4,1/4,1/3) bulunur.

6)KÜÇÜK BİR KUVVETİN EKSENE ETKİSİ: Buraya kadar, rijit cismin etrafında döndüğü eksenin sabitlenmiş olduğunu varsaydık. Şimdi, eksen üzerindeki sadece bir noktanın sabit olması halinde, cismin nasıl hareket edeceğini inceleyeceğiz. Göreceğimiz gibi, hızlıca dönen cisimler, büyük kararlılığa sahip olurlar ki bu durum **jireskop** mantığının temelini oluşturur. Katı cismin, sabitlenmiş düzgün bir mil etrafında serbestçe dönebildiğini başlangıçta ana eksenlerden biri (varsayalım e_2) etrafında serbestçe dönmekte olduğunu varsayalım. Bu durumda açısal hız $\vec{w} = w\hat{e}_3$ ise, açısal momentum $\vec{J} = I_3\vec{w}$ olur. Dış kuvvetler sıfır ise, açısal hız sabit olur. Ana eksene bir $\vec{r}$ noktasında küçük bir kuvvet uygulanırsa, cismin hareket denklemi $\dot{\vec{J}} = \vec{r}\times\vec{F}$ olur. Bu kuvvet, eksenin yön değiştirmesine sebep olur ve cisim e_3 eksenine dik küçük bir açısal hız bileşeni kazanır.

Kuvvet çok küçükse, eksene dik olan açısal momentum bileşeni ihmal edilebilir ve denklem $\dot{\vec{J}} = I_3\dot{\vec{w}} = \vec{r} \times \vec{F}$ olur.

Bir döner top veya oyuncak jireskopta (topaç), $\vec{F} = -Mg\hat{k}$ olup $\vec{R} = R\hat{e}_3$ konumundaki kütle merkezine etkir. Buna göre hareket denklemi $I_3 w\dot{\hat{e}}_3 = -Mg\, R\hat{e}_3 \times \hat{k}$ yazılabilir. Bu eşitlik $\dot{\hat{e}}_3 = \vec{\Omega} \times \hat{e}_3$ şeklinde de yazılabilmektedir. Burada $\vec{\Omega} = \dfrac{MgR}{I_3 w}\hat{k}$ olup, düşey eksen etrafında sabit açısal hızı (presesyonal açısal hızı) tanımlar.

7)BİR ANA EKSEN ETRAFINDA DÖNME KARARLILIĞI: e_1,e_2,e_3 ana eksenleri cisimle birlikte döner. Böylece eğer J için onun eksenlere göre tanımlanan bileşenleri cinsinden direkt bir ifade kullanmak istersek, bu bileşenlerin bir dönen çerçeve oluşturduğunu hatırlamamız gerekir. Bu durumda J nin mutlak değişim hızı $d\vec{J}/dt = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \vec{G}$ olur. Bağıl değişim hızı ise, $\dot{\vec{J}} = I_1\dot{w}_1\hat{e}_1 + I_2\dot{w}_2\hat{e}_2 + I_3\dot{w}_3\hat{e}_3$ olur. İki değişim hızı birbirine $\dfrac{d\vec{J}}{dt} = \dot{\vec{J}} + \vec{w} \times \vec{J}$ ile bağlıdır. Bu denklem bileşenler cinsinden $I_3\dot{w}_3 + (I_2 - I_1)w_1 w_2 = G_3$ olur ve 1,2,3 ün dairesel permütasyonu ile iki benzer denklem daha elde ederiz.

8)EULER AÇILARI: Bir katı cismin sabit bir nokta veya kütle merkezine yönelimi üç açı ile belirlenmelidir. Bu açılar çeşitli yollarla seçilebilir. Fakat en uygun bir seçim **Euler açıları** olarak bilinen bir takımdır. Bu açılardan ikisi eksenlerden birini diyelim ki $\hat{e}_3$ ün yönünü belirlemek için gereklidir. Bunlar, θ ve φ kutupsal açılarıdır. Üçüncüsü, cismin bu eksen etrafında standart bir konumdan dönmüş olduğu açıyı belirler. başlangıçta cismin e_1,e_2,e_3 eksenlerinin sabit i,j,k eksenleriyle çakışık olduğunu kabul edelim. İlk olarak k ekseni etrafında bir φ açısı kadar dönme yapılır. Bu, üç ekseni (e''_1, e'_2, k) konumuna getirir. Daha sonra e'_2 ekseni etrafında bir θ açısı kadar dönme yapılır ki bu da eksenleri (e'_1, e'_2, e_3) konumuna getirir. Son olarak ta e_3 ekseni etrafında bir ψ açısı kadar dönme yapılır. Bu işlemde, her üç ekseni (e_1,e_2,e_3) konumuna getirir. Bu üç Euler açısı (φ,θ,ψ) üç (e_1,e_2,e_3) ekseninin yönelimini belirlediğinden, bunlar katı cismin yönelimini tamamen belirler. Katı cismin açısal hızı, bu üç açının değişim hızıyla $\vec{w} = \dot{\varphi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}'_2 + \dot{\psi}\hat{e}_3$ şeklinde hesaplanır. Simetrik durumda, $\hat{k} = -\sin\theta.\hat{e}'_1 + \cos\theta.\hat{e}_3$, buradan da aşısal hız $\vec{w} = -\dot{\varphi}\sin\theta.\hat{e}'_1 + \dot{\theta}.\hat{e}'_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\hat{e}_3$ olarak bulunur. Cismin açısal momentum ifadesi $\vec{J} = -I_1\dot{\varphi}\sin\theta.\hat{e}'_1 + I_2\dot{\theta}.\hat{e}'_2 + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\hat{e}_3$, kinetik enerji ifadesi de $T = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$ olarak bulunur.

BÖLÜM-10
LAGRANGE MEKANİĞİ

1)GENELLEŞTİRİLMİŞ KOORDİNATLAR; HOLOMONİK SİSTEMLER: Çok sayıda N parçacıktan oluşan bir katı cismi göz önüne alalım. bütün parçacıkların konumları, 3N sayıda koordinatla belirtilebilir. Bununla beraber bu 3N sayıda koordinatın hepsi bağımsız değişken olmayıp sistemin katı cisim olmasından kaynaklanan bağ koşullarına tabidir. Gerçekte her parçacığın konumu, tam olarak altı niceliğin belirlenmesiyle tespit edilebilir: Örneğin, küyle merkezinin üç X,Y,Z koordinatı ve yön belirleyen üç φ,θ,ψ Euler açıları. Bu altı nicelik, katı cisim için bir **genelleştirilmiş koordinatlar** takımını oluşturmaktadır. Bu koordinatlar daha başka bağ koşullarına da tabi olabilirler. Söz konusu bağ koşulları iki çeşit olabilir: 1)Cismin bir noktasının

konumunun sabitlenmesi (X=Y=Z=0), 2)Kütle merkezinin sabit hızla hareket etmeye veya sabit hızlı dairesel hareket yapmaya zorlanması ($\dot{X} = v$).
Bağımsız olarak değişebilen koordinat sayısına sistemin **serbestlik derecesi sayısı** denir. Eğer bağ koşullu denklemleri çözmek ve koordinatların bir kısmını yok etmek mümkün olabiliyorsa-öyle ki yok edilen koordinatların sayısı serbestlik derecesi sayısına eşit olsun- böyle sistemlere **holomonik sistemler** denir. Eğer bu yok etme, zamanın açık fonksiyonlarını verirse, sistem **zorlanmış sistem**; diğer taraftan eğer bütün bağ koşulları tamamen cebirsel iseler yani t denklemde ($r_i=r_i(q_1,q_2,\ldots,t)$) açıkça gözükmüyorsa , bu durumda da sisteme **doğal sistem** denir. Genel olarak sistemin hız fonksiyonu $\dot{\vec{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ dir. Doğal sistem için son terim sıfırdır. Doğal sistem için fonksiyon **homojen kuadratik** , zorlanmış sistem için **lineer**dir. Simetrik katı cismin kinetik enerjisi $T = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2)+\frac{1}{2}I_1*(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I_3*(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2$ olur.

2)LAGRANGE DENKLEMLERİ: Lagrange denklemini 3.bölümde elde etmiştik, şimdi bunu daha da genelleştireceğiz. L=T-V Lagrange fonksiyonu için Lagrange denklemi $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ dir. Kinetik enerji için Lagrange denklemi $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + F_\alpha$ olur. Kuvvetler potansiyel enerjiden $F_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)$ şeklinde türetilip, korunumlu kuvvetler için sağdaki ikinci terim sıfırdır.

3)BİR SİMETRİK TOPACIN PRESESYONU: Simetrik topaç üç serbestlik dercesine sahiptir ve Euler açıları genelleştirilmiş koordinatlar olarak kullanılabilir. Bu topacın Lagrange fonksiyonu $L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2 - MgR\cos\theta$ olur. Buna göre; θ için Lagrange denklemi $I_1\ddot{\theta} = I_1\dot{\varphi}^2\sin\theta.\cos\theta - I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\varphi}.\sin\theta + MgR.\sin\theta$ dir. φ ve ψ için genelleştirilmiş momentum değişim denklemleri; $\frac{d}{dt}[I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta] = 0$, $\frac{d}{dt}[I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)] = 0$ olur. Son denkleme göre, w_3 açısal hızının simetri eksenine göre bileşeni sabittir, $w_3 = \dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta = sabit.$ Kararlı presesyon durumunda, topacın ekseni, düşey doğrultusu etrafında sabit $\dot{\varphi} = \Omega$ açısal hızıyla presesyon (yalpalama) hareketi yapar. Bu durumda w_3 ve Ω arasındaki bağıntı $I_1\Omega^2\cos\theta - I_3w_3\Omega + MgR = 0$ olur. sinθ#0 durumunda, w_3 ün çok büyük değerleri için $\Omega \cong \frac{MgR}{I_3 w_3}$, gravitasyon çekim kuvvetinin ihmal edilebildiği hızlı presesyon durumunda ise $\Omega \cong \frac{I_3 w_3}{I_1\cos\theta}$ dır. w_3 ün küçük değerleri için bu yaklaşık çözümler yeterli değildir, θ<π/2 eğimi için kararlı pereseyonun var olabileceği ve $I_3^2 w_3^2 = 4I_1MgR\text{Cos}\theta$ ile verilen w_3 için bir minimum değeri vardır. Bu sistemin (topaç, bileşik sarkaç) daha genel hareketi, Hamiltoniyen yöntemleri kullanılarak da bulunabilir.

4)BİR EKSEN ETRAFINDA DÖNMEYE ZORLANAN SARKAÇ: Bir ucunda m kütlesini taşıyan l uzunluğunda hafif bir çubuktan ibaret bir sarkaç düşünelim. Bu sistem, konumu θ ve φ ile belirtilen, iki serbestlik dercesine sahiptir (θ=0 denge konumu). Sitemin Lagrange fonksiyonu $L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - mgl(1-\cos\theta)$ olur. G torku tarafından yapılan iş δW=Gδφ olduğundan, Lagrange denklemleri $ml\ddot{\theta} = ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta$ ve $\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) = G$ olur. G torkunun sistemi düşey doğrultu etrafında $\dot{\varphi} = w$ sabit açısal hızıyla döndürmeye zorladığını varsayarsak, Lagrange fonksiyonu $L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + w^2\sin^2\theta) - mgl(1-\cos\theta)$ olur. Bu Lagrange fonksiyonunu türevli (T') ve türevsiz (-V') olarak iki kısma ayırdığımızda (L'=T'-V'), birinci terim salınımı ikinci terim ise merkezkaçı gösterir. G torkunun iç yapma hızı Gw olup, $\frac{d}{dt}(T+V) = Gw = \frac{d}{dt}(ml^2w^2\sin^2\theta)$ bulunur.

5)ELEKTROMANYETİK ALANDA YÜKLÜ PARÇACIK: Bu durum korunumlu olmayan kuvvetin en önemli örneklerinden biridir. Yükü q olan bir parçacığın E elektrik ve B manyetik alanda hareket ederken parçacığa etkiyen kuvvet $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ eşitliğiyle verilir. Bu kuvvetin x bileşeni $F_x = qE_x + q(\dot{y}B_z - zB_y)$ dir. Kuvvetin diğer iki bileşeni de , benzer olarak x,y,z'nin sıralı permütasyonları ile bulunur. Elektrik alanı skaler ve vektörel potansiyele $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ şeklinde bağlıdır. Burada A ise B manyetik alanına $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ şeklinde bağlıdır. Elektromanyetik alan etkisindeki bir parçacığın hareket denklemleri, Lagrange fonksiyonunun $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\dot{\vec{r}}.\vec{A}(\vec{r},t) - q\Phi(\vec{r},t)$ ile verilen biçimini kullanılarak da elde edilebilir. Buradaki genelleştirilmiş momentum $\vec{P} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}$ şeklindedir. Silindirik koordinatlarda Lagrangian fonksiyonu $L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + z^2) + q(\dot{\rho}A_\rho + \rho\dot{\varphi}A_\varphi + \dot{z}A_z) - q\Phi$ biçimindedir.

6)GERİLMİŞ TEL PROBLEMİ: Bu problem sonsuz sayıda serbestlik derecesine sahip bir sistemi örnekler. Tel, L uzunluklu ve birim uzunluğunun kütlesi m olan, iki ucu bağlı ve F kuvveti ile gerilmiş olsun. Telin küçük enine salınımlarını inceleyelim. Telin konum foksiyonu y(x,t) ve çok küçük dx elemanının kinetik enerjisi $\frac{1}{2}(\mu dx)\dot{y}^2$ dir. Telin toplam kinetik enerjisi $T = \int_0^l \frac{1}{2}\mu\dot{y}dx$, telin l uzunluğunun Δl kadar artırılmasıyla gerilmeye karşı yapılan iş (FΔl), yani telin potansiyel enerjisi $V = \int_0^l \frac{1}{2}F.y'^2\,dx$ dir. Buradan Lagrange fonksiyonu $L = \int_0^l (\frac{1}{2}\mu\dot{y}^2 - \frac{1}{2}F.y'^2)dx$ olur. Burada y'=dy/dx dir. Bu Lagrangian denklemi $L = \int_0^l L(y,\dot{y},y')dx$ olup, integral içindeki L fonksiyonuna **Lagrangian yoğunluğu** denir. Buradan **Hamilton prensibi** kullanılarak, Lagrangian için $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{d\dot{y}} = \mu\dot{y}$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = -Fy'$ denklemleri elde edilir. Buradan da tel için Lagrange denklemi $\ddot{y} = (\frac{F}{\mu})y''$ elde edilir. Bu denklem bir boyutlu dalga denklemidir. Bu denklemin çözümü $y=f[x+(F/\mu)^{1/2}t]+ g[x-(F/\mu)^{1/2}t]$ şeklindedir.

BÖLÜM-11
KÜÇÜK SALINIMLAR VE NORMAL KİPLER

1)ORTOGONAL KOORDİNATLAR: Burada tartışmalarımızı , kinetik enerjinin $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_n$ lerin homojen kuadratik fonksiyonu olduğu doğal sistemlerle sınırlandıracağız. Örneğin; n=2 için kinetik enerji ifadesi $T = \frac{1}{2}a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}a_{22}\dot{q}_2^2$ olacaktır. Buradaki a katsayıları q'lerin fonksiyonları olacak, q'lerin yeterince küçük değerleri için bu bağımlılık ihmal edilebilir ve a'lar sabit alınabilir. Eğrisel koordinatlarda belirlenen bir parçacık için, koordinat eğrileri her zaman dik açılarla kesişiyorlarsa, **ortogonal koordinatlar** adını alırlar. Bu durumda kinetik enerji kareli terimler içerir. Koordinatlar her zaman ortogonal seçilebilirler ve bu seçim önemli basitleştirmelere yol açar (örneğin $q'_1=q_1+(a_{12}/a_{11})q_2$). Buna göre kinetik enerjiyi her zaman $T=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{2}\dot{q}_\alpha^2$ olarak standart şekle indirgenebilir.

Buna bir örnek olarak bir **çifte sarkaç**ı ele alabiliriz. Çifte sarkaç, L uzunluğunda M kütleli sarkaç ile, ona asılı l uzunluğunda ve m kütleli ikinci bir sarkaçtan oluşur. Her hangi bir anda birinci sarkacın düşeyle yaptığı açı θ, ikinci sarkacın ise φ dir. Sistemin sadece düşey düzlemdeki hareketi için kinetik enerji de $T=\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\left[L^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\varphi}^2+2Ll\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)\right]$ olur. θ ve φ'nin küçük değerleri için cos(φ-θ)=1 alınabilir. Küçük açılar için, aslında, sarkaçların yer değiştirmeleri x=Lθ ve y=Lθ+lφ şeklinde ortogonal çiftidir. Buradan da kinetik enerji $T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2$ şekline girer.

2)KÜÇÜK SALINIMLARIN HAREKET DENKLEMİ: Potansiyel enerjisi V, kinetik enerjisi T olan parçacıklar sistemi için hareket denklemi $\ddot{q}_\alpha=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$ olur. Denge şartı, denge konumunda V nin n tane kısmi türevinin tümünün sıfır olmasıdır. Koordinatların küçük değerleri için V seriye açılabilir. n=2 için denge durumunda potansiyel enerji yaklaşık olarak $V=(1/2)k_{11}q_1^2+k_{12}q_1q_2+(1/2)k_{22}q_2^2$ şeklinde olur. Buradan da hareket denklemeleri, $\ddot{q}_1=-k_{11}q_1-k_{12}q_2$ ve $\ddot{q}_2=-k_{21}q_1-k_{22}q_2$ olarak bulunurlar. Burada simetriden dolayı $k_{21}=k_{12}$ dir. Buna göre çok daha genel durumda hareket denklemleri $\ddot{q}_\alpha=-\sum_{\beta=1}^{n}k_{\alpha\beta}q_\beta$ veya matris yazılışıyla

$$\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ ..\\ \ddot{q}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & .. & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & .. & k_{2n}\\ .. & .. & .. & ..\\ k_{n1} & k_{n2} & .. & k_{nn}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ ..\\ q_n\end{bmatrix}$$

olurlar. Örneğin çifte sarkaç durumunda, küçük açılar için hareket denklemleri, $\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{M+m}{ML}g-\frac{mg}{Ml} & \frac{mg}{Ml}\\ \frac{g}{l} & -\frac{g}{l}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ olarak bulunur.

3)NORMAL KİPLER: II.dereceden n tane diferansiyel denklem çiftinin genel çözümü, başlangıç durumlarıyla tayin edilen, 2n tane keyfi sabiti içermelidir. Salınım hareketlerinde bu genel çözümü bulmak için, genelde, bütün koordinatların aynı w frekansı ile salındığı kabul edilir. Buna göre A'lar komplek sabitler olmak üzere koordinatlar $q_\alpha=A_\alpha e^{iwt}$ alınır. Böyle çözümlere sistemin salınımının **normal kipleri (modları)** denir. n tane A_α genlikleri için, n tane lineer denklem takımı elde edilir. n=2 durumu için bu denklemler $\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}=-w^2\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}$ olarak yazılabilir. Bu **öz değer denklemi** olarak bilinir. Sıfırdan farklı çözümler için bulunan w^2 değerlerine, $k_{\alpha\beta}$ elemanlı 2x2 matrisinin **öz değerleri** adı verilir. A_α lardan oluşan sütun vektörü, matrisin bir **öz vektörü**dür. Buna göre matris denklemi $\begin{bmatrix}k_{11}-w^2 & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}-w^2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Bunun çözümü için I.matrisin determinantının sıfır olması gerekir. $(k_{11}-w^2)(k_{22}-w^2)-k_{12}^2=0$ buna sistemin **karakteristik denklemi** adı verilir. Bu denklemin diskriminantı pozitiftir, bu nedenle iki gerçek kökü vardır. Kararlılık için her iki kökte pozitif olmalıdır. $-\gamma^2$ gibi bir negatif kök $q_\alpha=A_\alpha e^{\gamma t}+B_\alpha e^{-\gamma t}$ şeklinde bir çözüm verir. Burada A_α ve B_α , $-\gamma 2$ öz değerine karşılık gelen, 2x2 matrisin öz vektörlerini kuran katsayılardır. İki vektörün bir birine eşit olduğu dejenerelik dışında, A ve B katsayıları birbirleriyle orantılıdır. Normal kip çözümünün fazını ve genel genliğini tayin etmek için kullanılan A_1 ve A_2 bir ortak, keyfi karmaşık çarpanı vardır. Böylece her normal kip çözümü iki keyfi gerçek sabiti içerir. Hareket denklemleri lineer olduğundan, çözümlerin lineer toplamları da bir çözümdür. Bu durumda genel çözüm, basitçe, iki normal kip çözümün üst üste gelmesidir.

Çözümler, w^2 ve w'^2 nin köklerinin $q_1 = A_1 e^{iwt} + A' e^{iw't}$ ve $q_2 = A_2 e^{iwt} + A' e^{iw't}$ gerçek kısımları olarak yazılabilir. Çifte sarkacın karakteristik denklemi $w^4 - \frac{M+m}{M}\left(\frac{g}{L} + \frac{g}{l}\right)w^2 + \frac{M+m}{M}\frac{g^2}{Ll} = 0$ olur. Bu denklemin kökleri, iki normal kipin frekansları olur. M>>m ise, l ve L'nin birbirine çok yakın olmaması kaydı ile, yaklaşık olarak, w^2=g/l, A_x/A_y=(m/M)(L/l-L) ve w^2=g/l, A_x/A_y=(L-l)/L gibidir. Birinci kipte üstteki sarkaç hemen hemen hareketsiz iken, alttaki doğal frekansı ile salınmaktadır. İkinci kipte frekans, üstteki sarkacın doğal frekansı ile aynı, genlikler ise birbirine yakındır.

M<<m olması durumunda normal kipler, yaklaşık olarak, w^2=g/(L+l), A_x/A_y=L/(L+l) ve w^2=(m/M)(g/L+g/l), A_x/A_y=-(m/M)(L+l)/L gibidir. Birinci kipte, sarkaçlar L+l uzunluğunda tek bir sarkaç gibi salınırlar. İkinci kipte üstteki sarkaç çok hızlı salınırken, alttaki hemen hemen hareketsiz kalır.

4)ÇİFTLANİMLİ SALINICILAR: Yaklaşık olarak birbirinden bağımsız, fakat ikisi arasında bir tür oldukça zayıf bir çiftlenim olan iki veya daha fazla harmonik salınıcılar, çiftlenimli salınıcılar olarak düşünülebilir. İki sarkaç ve bunları bağlayan bir yaydan oluşan sistem, buna iyi bir örnek oluşturur. Her birinin kütlesi m olan böyle bir sarkaç sisteminden, I.sarkacın düşeyden açılma miktarı (yer değiştirmesi) x, ikincininki y ise, kinetik ve potansiyel enerjiler yaklaşık olarak; $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ ve $V = \frac{1}{2} m w_0^2 (x^2 + y^2)$ şeklinde olur. Burada $w_0^2 = g/l$ çiftlenim olmadığı durumda serbest salınım frekansıdır. Şimdi yayın potansiyel enerjisini de hesaba kattığımızda, yayın bir ucu sabit iken diğer ucundaki m kütlesinin açısal frekansı $w_s^2 = k/m$ iken, Potansiyel enerji $V = \frac{1}{2} m(w_0^2 + w_s^2)(x^2 + y^2) - m w_s^2 xy$ olur. Bu durumda normal kip denklemi $\begin{bmatrix} w_0^2 + w_s^2 & -w_s^2 \\ -w_s^2 & w_0^2 + w_s^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$ dir. Karakteristik denklemin çözümleri A_x/A_y=1 için $w^2=w_0^2$ ve A_x/A_y=-1 için $w^2=w_0^2+2w_s^2$ olur. Sarkaçlar birinci kipte aynı genlikle aynı yönde, ikincisinde aynı genlikle zıt yönde salınırlar. Genel çözüm, bu iki normal kipin üst üste gelmesidir ve $w'^2=w_0^2+2w_s^2$ olmak üzere, $x = Ae^{iw_0 t} + A' e^{iw't}$ ve $y = Ae^{iw_0 t} - A' e^{iw't}$ lerin gerçek kısmı olarak verilir. Buradaki A veA' sabitleri başlangıç koşullarına göre tayin edilir.

5)İP ÜZERİNDEKİ PARÇACIKLARIN SALINIMLARI: (n+1)L uzunluğunda, hafif, F kuvveti ile gerilmiş ve üzerine eşit L aralıkları ile dizilmiş n tane m kütleli parçacık bulunan ipi ele alalım. Parçacıkların enine salınımlarını inceleyelim. Bunun için genelleştirilmiş koordinatlar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ yer değiştirmeleri şeklinde olsun. Bu durumda, koordinatlar ortogonal olduğundan, kinetik enerji $T = \frac{1}{2} m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \ldots + \dot{y}_n^2)$ dir. $y_0=y_{n+1}$ =0 alındığında, F ip gerilmesi olmak üzere, ipin potansiyel enerjisi $V = \frac{F}{2L}[y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + \ldots + (y_n - y_{n-1})^2 + y_n^2]$ olur. Bu durumda $\ddot{y}_1 = \frac{F}{mL}(-2y + y_2)$, $\ddot{y}_2 = \frac{F}{mL}(y_1 - 2y + y_3), \ldots, \ddot{y}_n = \frac{F}{mL}(y_{n-1} + 2y_n)$ şeklinde Lagrange hareket denklemleri elde edilir. W_0^2=F/mL alınıp, $y_j = A_j e^{iwt}$ normal kip çözümü yerine konulduğunda,

$$\begin{bmatrix} 2w_0^2 - w^2 & 0 & .. & 0 & 0 \\ -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ .. \\ A_n \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ .. \\ A_n \end{bmatrix}$$

denklemleri elde edilir. n=1 için $w^2=2w_0^2$ olmak üzere tek bir normal kip vardır. n=2 için karakteristik denklem $(2w_0^2-w^2)^2-w_0^4=0$ gibidir ve $w^2=w_0^2$, A_1/A_2 ve $w^2=3w_0^2$, A_1/A_2=-1 olarak iki normal kip elde edilir. n=3 için de $w^2 = (2 - \sqrt{2})w_0^2$, $A_1:A_2:A_3=1:(2)^{1/2}:1$, $w^2=2w_0^2$, $A_1:A_2:A_3$=1:0:-1, $w^2 = (2 + \sqrt{2})w_0^2$, $A_1:A_2:A_3=1:-(2)^{1/2}:1$ şeklinde üç normal kip elde edilir. Benzer olarak n=4 için dört normal kip…elde edilir.

Mehmet TAŞKAN

KAYNAK:

1) ÇOLAKOĞLU,Kemal, Çeviri editörü., KIBBLE,T.W.and BERKSHIRE, F.H, "**KLASİK MEKANİK"**, Dördüncü baskıdan çeviri, Palme yayıncılık, Ankara, 1999.

2) KİTTEL, Charles., KNIGHT,D.Walter., RUDERMAN, A.Malvin., Çeviri:NASUFOĞLU, Rauf., **"MEKANİK"**, Berkeley Fizik Programı, Cilt-1, 2.baskı, Güven Yayıncılık.

3) CRAWFORD,Frank.S, Berkeley, California Üniv., Çeviri Editörü: NASUHOĞLU,Rauf., **"TİTREŞİMLER VE DALGALAR"**, Berkeley Fizik Dizisi-3, Güven Yayıncılık.